TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Professur Wissensbasierte Systeme

Prof. Dr. Markus Krötzsch

Dr. Stephan Mennicke

Übungen zur Lehrveranstaltung

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2024

4. Übungsblatt

6.–12. Mai 2024

Die folgende Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen und dient der Selbstkontrolle.

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

a) $\mathbf{L}$ hat eine Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

b) $\mathbf{L}$ hat eine Obermenge $\mathbf{O} \supseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

c) Es gibt jeweils nicht nur eine sondern unendlich viele entscheidbare Teilmengen bzw. Obermengen wie in (a) und (b).

Aufgabe I

a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSpace liegen.

d) Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSpace}$ gilt.

e) Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PSpace}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-schwer“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Falls $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann auch $\mathrm{P} \cap \mathrm{NP} \neq \emptyset$.

b) Es gibt Probleme, die NP-schwer, aber nicht NP-vollständig sind.

c) Polynomielle Reduzierbarkeit ist nicht transitiv.

d) Ist $\mathbf{L}_2 \in \mathrm{P}$ und $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{P}$.

e) Ist $\mathbf{L}_1$ eine NP-vollständige Sprache und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ eine NP-vollständige Sprache.

f) Ist $\mathbf{L}_2$ eine NP-vollständige Sprache und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_1$ eine NP-vollständige Sprache.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Wortproblem deterministischer endlicher Automaten in LogSpace liegt: ist

$$\mathbf{P}_{\mathsf{DFA}} := \{ \, \mathsf{enc}(\mathcal{A})\#\#\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{A} \text{ ist ein DFA, der } w \text{ akzeptiert} \, \},$$

dann gilt $\mathbf{P}_{\mathsf{DFA}} \in$ LogSpace.

Aufgabe 3

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ gibt, so dass $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und es eine Bijektion $f \colon V_1' \to V_2'$ gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

a) Zeigen Sie $K \in$ NP.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-schweres Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf K in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Ist P = NP, dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit für jede erfüllbare aussagenlogische Formel eine erfüllende Belegung findet.