Technische Universität Dresden

Formale Systeme

22. Vorlesung: Das Halteproblem und Reduktionen

Markus Krötzsch

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 15. Januar 2026

LOOP und WHILE, Reprise

Zusammenfassung LOOP und WHILE

LOOP-Programme

- Terminieren immer
- Können fast alle praktisch relevanten Funktionen berechnen
- Können nicht jede berechenbare Funktion berechnen, z.B. Ackermann-Funktion, Sudan-Funktion, LOOP-Busy-Beaver

WHILE-Programme

- Verallgemeinern LOOP
- Terminieren nicht immer
- Können alle berechenbaren totalen und partiellen Funktionen berechnen

Online-Simulator für LOOP und WHILE$^{(++)}$ (+Abkürzungen, +Kommentare):
https://tools.iccl.inf.tu-dresden.de/while/

Die Kraft des LOOP

Auf der vorigen Folie steht:
„LOOP-Programme können fast alle praktisch relevanten Funktionen berechnen.“

Stimmt das wirklich?

Die Kraft des LOOP

Auf der vorigen Folie steht:
„LOOP-Programme können fast alle praktisch relevanten Funktionen berechnen.“

Stimmt das wirklich?

Idee: Die Schleife **WHILE** `x!=0` **DO** P **END** kann mit dem folgenden LOOP-Programm simuliert werden:

```
LOOP max DO
  IF x!=0 THEN
    P
  END
END
```

Die Kraft des LOOP

Auf der vorigen Folie steht:
„LOOP-Programme können fast alle praktisch relevanten Funktionen berechnen."

Stimmt das wirklich?

Idee: Die Schleife **WHILE** `x!=0` **DO** P **END** kann mit dem folgenden LOOP-Programm simuliert werden:

```
LOOP max DO
  IF x!=0 THEN
    P
  END
END
```

wenn man den Wert von `max` so setzt, dass er mindestens so groß ist wie die maximale Anzahl von Wiederholungen der simulierten WHILE-Schleife.

LOOP kann WHILE simulieren

Erkenntnis: LOOP kann WHILE für beliebig viele Schritte simulieren – man muss nur wissen, wie viele Schritte benötigt werden.

Kann man das ausrechnen?

LOOP kann WHILE simulieren

Erkenntnis: LOOP kann WHILE für beliebig viele Schritte simulieren – man muss nur wissen, wie viele Schritte benötigt werden.

Kann man das ausrechnen? Ja!

Satz: Für ein beliebiges WHILE-Programm P sei $\max_P(n_1, \ldots, n_k)$ die maximale Anzahl an Schleifendurchläufen, die P bei der Eingabe $n_1, \ldots, n_k$ abarbeitet, oder undefiniert, wenn P bei dieser Eingabe nicht terminiert.
Diese partielle Funktion $\max_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist berechenbar.

Beweisskizze: Man kann P leicht so modifizieren, dass es die Maximalzahl der Schleifendurchläufe bestimmt und ausgibt. □

LOOP kann WHILE simulieren

Erkenntnis: LOOP kann WHILE für beliebig viele Schritte simulieren – man muss nur wissen, wie viele Schritte benötigt werden.

Kann man das ausrechnen? Ja!

Satz: Für ein beliebiges WHILE-Programm P sei $\mathrm{max}_P(n_1, \ldots, n_k)$ die maximale Anzahl an Schleifendurchläufen, die P bei der Eingabe $n_1, \ldots, n_k$ abarbeitet, oder undefiniert, wenn P bei dieser Eingabe nicht terminiert.
Diese partielle Funktion $\mathrm{max}_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist berechenbar.

Beweisskizze: Man kann P leicht so modifizieren, dass es die Maximalzahl der Schleifendurchläufe bestimmt und ausgibt. □

Wo ist der Haken?

LOOP kann WHILE simulieren

Erkenntnis: LOOP kann WHILE für beliebig viele Schritte simulieren – man muss nur wissen, wie viele Schritte benötigt werden.

Kann man das ausrechnen? Ja!

Satz: Für ein beliebiges WHILE-Programm P sei $\max_P(n_1, \ldots, n_k)$ die maximale Anzahl an Schleifendurchläufen, die P bei der Eingabe $n_1, \ldots, n_k$ abarbeitet, oder undefiniert, wenn P bei dieser Eingabe nicht terminiert.
Diese partielle Funktion $\max_P : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist berechenbar.

Beweisskizze: Man kann P leicht so modifizieren, dass es die Maximalzahl der Schleifendurchläufe bestimmt und ausgibt. □

Wo ist der Haken?

Die Funktion $\max_P$ ist zwar berechenbar, aber im Allgemeinen nicht LOOP-berechenbar.

Was kann LOOP?

Es gibt aber viele Fälle, in denen man (eine obere Schranke von) $\max_P$ LOOP-berechnen kann:

Satz: Die folgenden Funktionen sind LOOP-berechenbar:

- $n \cdot \mathtt{x}$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $\mathtt{x}^n$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $n^{\mathtt{x}}$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^{\mathtt{x}}}}}}$ für beliebig hohe Türme von Exponenten n

Was kann LOOP?

Es gibt aber viele Fälle, in denen man (eine obere Schranke von) $\max_P$ LOOP-berechnen kann:

Satz: Die folgenden Funktionen sind LOOP-berechenbar:

- $n \cdot \mathtt{x}$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $\mathtt{x}^n$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $n^{\mathtt{x}}$ für beliebige natürliche Zahlen n
- $n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^{\mathtt{x}}}}}}$ für beliebig hohe Türme von Exponenten n

Korollar: Jeder Algorithmus, der in Zeit $O(n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n^{\mathtt{x}}}}}})$ – oder weniger – läuft, berechnet eine LOOP-berechenbare Funktion. Insbesondere sind alle polynomiellen, exponentiellen oder mehrfach exponentiellen Algorithmen in LOOP implementierbar.

Universalität

Die Universalmaschine

Eine erste wichtige Beobachtung Turings war, dass TMs stark genug sind um andere TMs zu simulieren:

Schritt 1: Kodiere Turingmaschinen $\mathcal{M}$ als Wörter $\text{enc}(\mathcal{M})$

Schritt 2: Konstruiere eine universelle Turingmaschine $\mathcal{U}$, die $\text{enc}(\mathcal{M})$ als Eingabe erhält und dann die Berechnung von $\mathcal{M}$ simuliert

Schritt 1: Turingmaschinen kodieren

Jede vernünftige Kodierung einer TM $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ ist nutzbar, zum Beispiel die folgende (für DTMs):

- Wir verwenden das Alphabet $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{\#}\}$
- Zustände werden in beliebiger Reihenfolge nummeriert (mit Startzustand q_0) und binär kodiert:
  $Q = \{q_0, \ldots, q_n\} \rightsquigarrow \mathsf{enc}(Q) = \mathsf{bin}(0)\mathtt{\#}\cdots\mathtt{\#}\mathsf{bin}(n)$
- Wir kodieren auch Γ und die Bewegungsrichtungen $\{R, L, N\}$ binär
- Ein Übergang $\delta(q_i, \sigma_n) = \langle q_j, \sigma_m, D\rangle$ wird als 5-Tupel kodiert:
  $\mathsf{enc}(q_i, \sigma_n) = \mathsf{bin}(i)\mathtt{\#}\mathsf{bin}(n)\mathtt{\#}\mathsf{bin}(j)\mathtt{\#}\mathsf{bin}(m)\mathtt{\#}\mathsf{bin}(D)$
- Die Übergangsfunktion wird kodiert als Liste aller dieser Tupel, getrennt mit $\mathtt{\#}$:
  $\mathsf{enc}(\delta) = (\mathsf{enc}(q_i, \sigma_n)\mathtt{\#})_{q_i\in Q, \sigma_i\in\Gamma}$
- Insgesamt setzten wir $\mathsf{enc}(\mathcal{M}) = \mathsf{enc}(Q)\mathtt{\#\#}\mathsf{enc}(\Sigma)\mathtt{\#\#}\mathsf{enc}(\Gamma)\mathtt{\#\#}\mathsf{enc}(\delta)\mathtt{\#\#}\mathsf{enc}(F)$

Passend dazu kann man auch beliebige Wörter kodieren:

- Für ein Wort $w = a_1\cdots a_\ell$ setzen wir $\mathsf{enc}(w) = \mathsf{bin}(a_1)\mathtt{\#}\cdots\mathtt{\#}\mathsf{bin}(a_\ell)$

Schritt 2: Die universelle Turingmaschine

Wir definieren die universelle TM $\mathcal{U}$ als Mehrbandturingmaschine:

Band 1: Eingabeband von $\mathcal{U}$: enthält enc$(\mathcal{M})$##enc(w)

Band 2: Arbeitsband von $\mathcal{U}$

Band 3: Speichert den Zustand der simulierten Turingmaschine

Band 4: Arbeitsband der simulierten Turingmaschine

Schritt 2: Die universelle Turingmaschine

Wir definieren die universelle TM $\mathcal{U}$ als Mehrbandturingmaschine:

Band 1: Eingabeband von $\mathcal{U}$: enthält enc($\mathcal{M}$)##enc(w)

Band 2: Arbeitsband von $\mathcal{U}$

Band 3: Speichert den Zustand der simulierten Turingmaschine

Band 4: Arbeitsband der simulierten Turingmaschine

Die Arbeitsweise von $\mathcal{U}$ ist leicht skizziert:

- $\mathcal{U}$ prüft Eingabe, kopiert enc(w) auf Band 4, verschiebt den Kopf auf Band 4 zum Anfang und initialisiert Band 3 mit enc(0).
- In jedem Schritt liest $\mathcal{U}$ ein (kodiertes) Zeichen von der aktuellen Kopfposition auf Band (4), sucht für den simulierten Zustand (Band 3) einen passenden Übergang in enc($\mathcal{M}$) auf Band 1:
  - Übergang gefunden: setze Band 3 auf den neuen Zustand; ersetzt das kodierte Zeichen auf Band 4 durch das neue Zeichen; verschiebe den Kopf auf Band 4 entsprechend
  - Übergang nicht gefunden: nimm Endzustand ein, falls der Zustand von Band 3 Endzustand in enc($\mathcal{M}$) ist; halte

Die Theorie der Software

Satz: Es gibt eine universelle Turingmaschine $\mathcal{U}$, die für Eingaben der Form enc($\mathcal{M}$)##enc(w) das Verhalten der DTM $\mathcal{M}$ auf w simuliert:

- Falls $\mathcal{M}$ auf w hält, dann hält $\mathcal{U}$ auf enc($\mathcal{M}$)##enc(w) mit dem gleichen Ergebnis
- Falls $\mathcal{M}$ auf w nicht hält, dann hält $\mathcal{U}$ auf enc($\mathcal{M}$)##enc(w) ebenfalls nicht

Unsere Konstruktion ist für DTMs, die Sprachen erkennen – DTMs, die Funktionen berechnen, können ähnlich simuliert werden.

Die Theorie der Software

Satz: Es gibt eine universelle Turingmaschine $\mathcal{U}$, die für Eingaben der Form enc($\mathcal{M}$)##enc(w) das Verhalten der DTM $\mathcal{M}$ auf w simuliert:

- Falls $\mathcal{M}$ auf w hält, dann hält $\mathcal{U}$ auf enc($\mathcal{M}$)##enc(w) mit dem gleichen Ergebnis
- Falls $\mathcal{M}$ auf w nicht hält, dann hält $\mathcal{U}$ auf enc($\mathcal{M}$)##enc(w) ebenfalls nicht

Unsere Konstruktion ist für DTMs, die Sprachen erkennen – DTMs, die Funktionen berechnen, können ähnlich simuliert werden.

Praktische Konsequenzen:

- Universalrechner sind möglich
- Wir müssen nicht für jede neue Anwendung einen neuen Computer anschaffen
- Es gibt Software

Unentscheidbare Probleme und Reduktionen

Das Halteproblem

Ein klassisches unentscheidbares Problem ist das Halteproblem:

Das **Halteproblem** besteht in der folgenden Frage:

> Gegeben eine TM $\mathcal{M}$ und ein Wort w,
> wird $\mathcal{M}$ für die Eingabe w jemals anhalten?

Das Halteproblem

Ein klassisches unentscheidbares Problem ist das Halteproblem:

Das Halteproblem besteht in der folgenden Frage:
Gegeben eine TM $\mathcal{M}$ und ein Wort w,
wird $\mathcal{M}$ für die Eingabe w jemals anhalten?

Wir können das Halteproblem formal als Entscheidungsproblem ausdrücken, wenn wir $\mathcal{M}$ und w kodieren:

Das Halteproblem ist das Wortproblem für die Sprache

$$\mathbf{P}_{\text{Halt}} = \{\text{enc}(\mathcal{M})\#\#\text{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ hält bei Eingabe } w\},$$

wobei $\text{enc}(\mathcal{M})$ und $\text{enc}(w)$ geeignete Kodierungen von $\mathcal{M}$ und w sind, so dass ## als Trennwort verwendet werden kann.

Anmerkung: Falsch kodierte Eingaben werden hier auch abgelehnt.

„Beweis“ durch Intuition

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathrm{Halt}}$ ist unentscheidbar.

„Beweis“ durch Intuition

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ ist unentscheidbar.

„Beweis:“ Das Gegenteil wäre zu schön um wahr zu sein. Viele ungelöste Probleme könnte man damit direkt lösen.

„Beweis“ durch Intuition

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ ist unentscheidbar.

„Beweis:“ Das Gegenteil wäre zu schön um wahr zu sein. Viele ungelöste Probleme könnte man damit direkt lösen.

Beispiel: Die Goldbachsche Vermutung (Christian Goldbach, 1742) besagt, dass jede gerade Zahl $n \geq 4$ die Summe zweier Primzahlen ist. Zum Beispiel ist $4 = 2 + 2$ und $100 = 47 + 53$.

„Beweis“ durch Intuition

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ ist unentscheidbar.

„Beweis:“ Das Gegenteil wäre zu schön um wahr zu sein. Viele ungelöste Probleme könnte man damit direkt lösen.

Beispiel: Die Goldbachsche Vermutung (Christian Goldbach, 1742) besagt, dass jede gerade Zahl $n \geq 4$ die Summe zweier Primzahlen ist. Zum Beispiel ist $4 = 2 + 2$ und $100 = 47 + 53$.

Man kann leicht einen Algorithmus $\mathcal{A}$ angeben, der die Goldbachsche Vermutung systematisch verifiziert, d.h., für alle geraden Zahlen ab 4 testet:

- Erfolg: teste die nächste gerade Zahl
- Misserfolg: terminiere mit Meldung „Goldbach hat sich geirrt!“

Die Frage „Wird $\mathcal{A}$ halten?“ ist gleichbedeutend mit der Frage „Gilt die Goldbachsche Vermutung nicht?“

Vgl. 13. Übung, Aufg. 4: Mit $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ kann man alle semi-entscheidbaren Probleme lösen

Abschweifung

Ist die Goldbachsche Vermutung entscheidbar?

Beweis durch „Diagonalisierung“

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis durch „Diagonalisierung“

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathrm{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Per Widerspruch: Wir nehmen an, dass es einen Entscheider $\mathcal{H}$ für das Halteproblem gibt.

Beweis durch „Diagonalisierung“

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Per Widerspruch: Wir nehmen an, dass es einen Entscheider $\mathcal{H}$ für das Halteproblem gibt.

Dann kann man eine TM $\mathcal{D}$ konstruieren, die folgendes tut:

(1) Prüfe, ob die Eingabe eine TM-Kodierung enc($\mathcal{M}$) ist

(2) Simuliere $\mathcal{H}$ auf der Eingabe enc($\mathcal{M}$)##enc(enc($\mathcal{M}$)), d.h. prüfe, ob $\mathcal{M}$ auf enc($\mathcal{M}$) hält

(3) Falls ja, dann gehe in eine Endlosschleife;
falls nein, dann halte und akzeptiere

Beweis durch „Diagonalisierung“

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Per Widerspruch: Wir nehmen an, dass es einen Entscheider $\mathcal{H}$ für das Halteproblem gibt.

Dann kann man eine TM $\mathcal{D}$ konstruieren, die folgendes tut:

(1) Prüfe, ob die Eingabe eine TM-Kodierung $\text{enc}(\mathcal{M})$ ist

(2) Simuliere $\mathcal{H}$ auf der Eingabe $\text{enc}(\mathcal{M})\#\#\text{enc}(\text{enc}(\mathcal{M}))$, d.h. prüfe, ob $\mathcal{M}$ auf $\text{enc}(\mathcal{M})$ hält

(3) Falls ja, dann gehe in eine Endlosschleife;
falls nein, dann halte und akzeptiere

Akzeptiert $\mathcal{D}$ die Eingabe $\text{enc}(\mathcal{D})$?

Beweis durch „Diagonalisierung“

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Per Widerspruch: Wir nehmen an, dass es einen Entscheider $\mathcal{H}$ für das Halteproblem gibt.

Dann kann man eine TM $\mathcal{D}$ konstruieren, die folgendes tut:

(1) Prüfe, ob die Eingabe eine TM-Kodierung enc($\mathcal{M}$) ist

(2) Simuliere $\mathcal{H}$ auf der Eingabe enc($\mathcal{M}$)##enc(enc($\mathcal{M}$)), d.h. prüfe, ob $\mathcal{M}$ auf enc($\mathcal{M}$) hält

(3) Falls ja, dann gehe in eine Endlosschleife;
falls nein, dann halte und akzeptiere

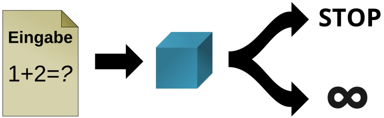
Akzeptiert $\mathcal{D}$ die Eingabe enc($\mathcal{D}$)?

$\mathcal{D}$ hält und akzeptiert genau dann wenn $\mathcal{D}$ nicht hält

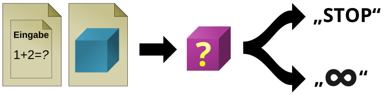
Widerspruch. □

Diagonalisierung, graphische Darstellung

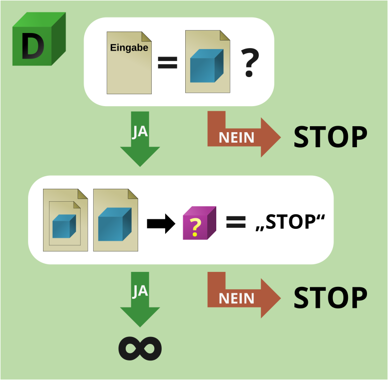
Bekannt: Eine Maschine hält auf einem Input oder nicht:



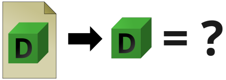
Annahme: Es gibt eine Maschine, die Halten entscheidet:



Bauplan Diagonalisierungsmaschine:



Paradoxon:



Beweis durch Reduktion

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis durch Reduktion

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Nehmen wir an, das Halteproblem wäre entscheidbar.

Beweis durch Reduktion

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Nehmen wir an, das Halteproblem wäre entscheidbar.

Ein Algorithmus:

- Eingabe: (binärkodierte) natürliche Zahl k
- Iteriere über alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ mit k Zuständen über dem Arbeitsalphabet $\{\mathtt{x}, \llcorner\!\lrcorner\}$:
  - Entscheide ob $\mathcal{M}$ bei leerer Eingabe ϵ hält
    (möglich, wenn das Halteproblem entscheidbar ist)
  - Falls ja, dann simuliere $\mathcal{M}$ auf der leeren Eingabe und zähle nach der Terminierung von $\mathcal{M}$ die $\mathtt{x}$ auf dem Band
    (möglich, da es universelle Turingmaschinen gibt)
- Ausgabe: die maximale Zahl der geschriebenen $\mathtt{x}$.

Beweis durch Reduktion

Satz: Das Halteproblem $\mathbf{P}_{\text{Halt}}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Nehmen wir an, das Halteproblem wäre entscheidbar.

Ein Algorithmus:

- Eingabe: (binärkodierte) natürliche Zahl k
- Iteriere über alle Turingmaschinen $\mathcal{M}$ mit k Zuständen über dem Arbeitsalphabet $\{\mathtt{x}, \llcorner\!\lrcorner\}$:
  - Entscheide ob $\mathcal{M}$ bei leerer Eingabe ϵ hält
    (möglich, wenn das Halteproblem entscheidbar ist)
  - Falls ja, dann simuliere $\mathcal{M}$ auf der leeren Eingabe und zähle nach der Terminierung von $\mathcal{M}$ die $\mathtt{x}$ auf dem Band
    (möglich, da es universelle Turingmaschinen gibt)
- Ausgabe: die maximale Zahl der geschriebenen $\mathtt{x}$.

Dieser Algorithmus würde die Busy-Beaver-Funktion $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnen.

Wir wissen, dass das unmöglich ist – Widerspruch. $\square$

Turing-Reduktionen

Unser Beweis konstruiert den Algorithmus für ein Problem (Busy Beaver) durch Aufruf von Subroutinen für ein anderes (Halteproblem)

Turing-Reduktionen

Unser Beweis konstruiert den Algorithmus für ein Problem (Busy Beaver) durch Aufruf von Subroutinen für ein anderes (Halteproblem)

Diese Idee lässt sich verallgemeinern:

Ein Problem **P** ist Turing-reduzierbar auf ein Problem **Q** (in Symbolen: $\mathbf{P} \leq_T \mathbf{Q}$), wenn man **P** mit einem Programm lösen kann, welches ein Programm für **Q** als Unterprogramm aufrufen darf.

Anmerkung: Das ist etwas informell. Eine ganz formelle Definition verwendet den Begriff des Orakels für Turingmaschinen.

Turing-Reduktionen

Unser Beweis konstruiert den Algorithmus für ein Problem (Busy Beaver) durch Aufruf von Subroutinen für ein anderes (Halteproblem)

Diese Idee lässt sich verallgemeinern:

Ein Problem **P** ist Turing-reduzierbar auf ein Problem **Q** (in Symbolen: **P** $\leq_T$ **Q**), wenn man **P** mit einem Programm lösen kann, welches ein Programm für **Q** als Unterprogramm aufrufen darf.

Anmerkung: Das ist etwas informell. Eine ganz formelle Definition verwendet den Begriff des Orakels für Turingmaschinen.

Beispiel: Unser Beweis basiert auf einer Turing-Reduktion der Berechnung der Busy-Beaver-Funktion auf das Halteproblem.

Turing-Reduktionen: Beispiel

Beispiel: Das Nicht-Halteproblem $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$, ist definiert als

$$\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}} = \{\mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ hält nicht bei Eingabe } w\}$$

$\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$ ist Turing-reduzierbar auf $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$: (1) Prüfe Eingabeformat, (2) entscheide Halteproblem, (3) invertiere Ergebnis.

Analog kann auch $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ auf $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$ Turing-reduziert werden.

Turing-Reduktionen: Beispiel

Beispiel: Das Nicht-Halteproblem $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$, ist definiert als

$$\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}} = \{\mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ hält nicht bei Eingabe } w\}$$

$\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$ ist Turing-reduzierbar auf $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$: (1) Prüfe Eingabeformat, (2) entscheide Halteproblem, (3) invertiere Ergebnis.

Analog kann auch $\mathbf{P}_{\mathsf{Halt}}$ auf $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$ Turing-reduziert werden.

Daraus ergibt sich:

Satz: Das Nicht-Halteproblem $\overline{\mathbf{P}}_{\mathsf{Halt}}$ ist unentscheidbar.

ϵ-Halten

Sonderfälle des Halteproblems sind in der Regel nicht einfacher:

Das ϵ-Halteproblem besteht in der folgenden Frage:
Gegeben eine TM $\mathcal{M}$,
wird $\mathcal{M}$ für die leere Eingabe ϵ jemals anhalten?

ϵ-Halten

Sonderfälle des Halteproblems sind in der Regel nicht einfacher:

Das ϵ-Halteproblem besteht in der folgenden Frage:

Gegeben eine TM $\mathcal{M}$,

wird $\mathcal{M}$ für die leere Eingabe ϵ jemals anhalten?

Satz: Das ϵ-Halteproblem ist unentscheidbar.

ϵ-Halten

Sonderfälle des Halteproblems sind in der Regel nicht einfacher:

Das ϵ-Halteproblem besteht in der folgenden Frage:
Gegeben eine TM $\mathcal{M}$,
wird $\mathcal{M}$ für die leere Eingabe ϵ jemals anhalten?

Satz: Das ϵ-Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis: Angenommen das Problem wäre entscheidbar.

Ein Algorithmus:

- Eingabe: Eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ und ein Wort w.
- Konstruiere eine TM $\mathcal{M}_w$, die zwei Schritte ausführt:
  (1) Lösche das Eingabeband und fülle es mit dem Wort w
  (2) Verarbeite diese Eingabe wie $\mathcal{M}$
- Entscheide das ϵ-Halteproblem für $\mathcal{M}_w$.
- Ausgabe: Ergebnis des ϵ-Halteproblems

ϵ-Halten

Sonderfälle des Halteproblems sind in der Regel nicht einfacher:

Das ϵ-Halteproblem besteht in der folgenden Frage:
Gegeben eine TM $\mathcal{M}$,
wird $\mathcal{M}$ für die leere Eingabe ϵ jemals anhalten?

Satz: Das ϵ-Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis: Angenommen das Problem wäre entscheidbar.

Ein Algorithmus:

- Eingabe: Eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ und ein Wort w.
- Konstruiere eine TM $\mathcal{M}_w$, die zwei Schritte ausführt:
  (1) Lösche das Eingabeband und fülle es mit dem Wort w
  (2) Verarbeite diese Eingabe wie $\mathcal{M}$
- Entscheide das ϵ-Halteproblem für $\mathcal{M}_w$.
- Ausgabe: Ergebnis des ϵ-Halteproblems

Dies würde das Halteproblem entscheiden – Widerspruch. □

Beweistechniken im Vergleich

Wir haben zwei ähnliche Unentscheidbarkeitsbeweise gesehen:

Halteproblem

- Reduktion der Busy-Beaver-Funktion
- Algorithmus ruft Subroutine für Halteproblem exponentiell oft auf
- Ausgabe wird durch weitere TM-Simulationen berechnet

$\rightsquigarrow$ Turing-Reduktion!

ϵ-Halteproblem

- Reduktion des Halteproblems
- Algorithmus ruft Subroutine für ϵ-Halteproblem immer genau einmal auf
- Ausgabe ist das Ergebnis der ϵ-Halteproblem-Routine

$\rightsquigarrow$ Turing-Reduktion?

Many-One-Reduktionen

Idee: Im letzten Beweis verwendeten wir das ϵ-Halteproblem nicht als Subroutine eines komplexen Programms, sondern wir formten das Halteproblem in ein ϵ-Halteproblem um

Eine berechenbare totale Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist eine Many-One-Reduktion von einer Sprache **P** auf eine Sprache **Q** (in Symbolen: $\mathbf{P} \leq_m \mathbf{Q}$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in \mathbf{P} \quad \text{genau dann wenn} \quad f(w) \in \mathbf{Q}$$

Many-One-Reduktionen

Idee: Im letzten Beweis verwendeten wir das ϵ-Halteproblem nicht als Subroutine eines komplexen Programms, sondern wir formten das Halteproblem in ein ϵ-Halteproblem um

Eine berechenbare totale Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist eine Many-One-Reduktion von einer Sprache **P** auf eine Sprache **Q** (in Symbolen: $\mathbf{P} \leq_m \mathbf{Q}$), wenn für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in \mathbf{P} \quad \text{genau dann wenn} \quad f(w) \in \mathbf{Q}$$

Beispiel: Die folgende Funktion definiert eine Many-One-Reduktion vom Halteproblem auf das ϵ-Halteproblem:

$$f(v) = \begin{cases} \text{enc}(\mathcal{M}_w) & \text{falls } v = \text{enc}(\mathcal{M})\#\#\text{enc}(w) \text{ für eine TM } \mathcal{M} \\ \# & \text{falls die Eingabe nicht korrekt kodiert ist} \end{cases}$$

Dabei ist $\mathcal{M}_w$ die TM aus dem Beweis.

Entscheidbarkeit durch Reduktion

Das folgende Resultat drückt die wesentliche Idee hinter Reduktionen aus:

Satz: Wenn **P** $\leq_m$ **Q** und **Q** entscheidbar ist, dann ist auch **P** entscheidbar.

Beweis: Die Reduktion liefert einen Entscheidungsalgorithmus. □

Entscheidbarkeit durch Reduktion

Das folgende Resultat drückt die wesentliche Idee hinter Reduktionen aus:

Satz: Wenn **P** $\leq_m$ **Q** und **Q** entscheidbar ist, dann ist auch **P** entscheidbar.

Beweis: Die Reduktion liefert einen Entscheidungsalgorithmus. □

Eigentlich benutzen wir bisher vor allem die Umkehrung:

Satz: Wenn **P** $\leq_m$ **Q** und **P** unentscheidbar ist, dann ist auch **Q** unentscheidbar.

Many-One vs. Turing

Many-One vs. Turing

Many-One-Reduktionen sind schwächer als Turing-Reduktionen:

Satz: Jede Many-One-Reduktion kann als Turing-Reduktion ausgedrückt werden.

Beweis: Die Turing-Reduktion ergibt sich, wenn man die (berechenbare) Many-One-Reduktionsfunktion als Teil einer TM implementiert. □

Many-One vs. Turing

Many-One-Reduktionen sind schwächer als Turing-Reduktionen:

Satz: Jede Many-One-Reduktion kann als Turing-Reduktion ausgedrückt werden.

Beweis: Die Turing-Reduktion ergibt sich, wenn man die (berechenbare) Many-One-Reduktionsfunktion als Teil einer TM implementiert. □

Satz: Es gibt Probleme **P** und **Q**, für die $\mathbf{P} \leq_T \mathbf{Q}$ gilt, aber nicht $\mathbf{P} \leq_m \mathbf{Q}$.

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass $\mathbf{P}_{\text{Halt}} \leq_T \overline{\mathbf{P}}_{\text{Halt}}$. Aber es gilt nicht $\mathbf{P}_{\text{Halt}} \leq_m \overline{\mathbf{P}}_{\text{Halt}}$ – wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, warum nicht. □

Zusammenfassung und Ausblick

LOOP-Programme können wirklich fast alle praktisch relevanten Probleme lösen

Durch Reduktionen können wir aus der (Un)Lösbarkeit eines Problems die (Un)Lösbarkeit eines anderen ableiten

Turing-Reduktionen **P** $\leq_T$ **Q** verwenden die Lösung von **Q** als Subroutine in einem Algorithmus für **P**

Many-One-Reduktionen **P** $\leq_m$ **Q** formen eine Problemstellung für **P** in eine Problemstellung für **Q** um

Was erwartet uns als nächstes?

- Mehr zu Semi-Entscheidbarkeit
- Ein unentscheidbares Problem von Emil Post ...
- ... und unendlich viele von Henry Gordon Rice