

FORMALE SYSTEME

21. Vorlesung: Aussagenlogik

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 9. Januar 2017

Kommentare: Allgemeines

Danke für die vielen freundlichen Kommentare!

Konkrete technische Verbesserungswünsche werden soweit möglich umgesetzt:

- „Die Folien direkt nach der Vorlesung verfügbar haben“
- „Das Mikro ist im Raum E02 im HSZ regelmäßig zu leise“
- „Eine bessere Justierung des Beamers im HSZ/003 ;)“
- „Besser auf Vorwissen aus AuD und Programmierung abstimmen“
- „jede Woche 1 Baby-Foto“ (mal sehen . . .)

Besprechung Lehrevaluation

Kommentare: Beispiele und Praxisbezug

... besonders gut gefallen?

Verbesserungswünsche?

„Sehr viele Beispiele“

„Ich finde es besser, wenn es ein bisschen mehr Beispiele gibt.“

„Viele einfache verständliche Beispiele“

„Mehr Beispiele.“

„macht eher 'trockenen' Stoff spannend“

„Praxisbezug erhöhen“

„Mehr Praxisbezug“

„Mehr Praxis-Beispiele“

Kommentare: Beweise und Tempo

... besonders gut gefallen?

Verbesserungswünsche?

„Beweise <3“

„Ein oder zwei Beweise weniger wären gut. ;)“

„Weniger Beweise“

„Beweise gut erklärt“

„Beweise teilweise **zu schnell** erklärt“

„Tempo etwas **verlangsamten**“

„**Weniger ausführliche** Beweise“

„Manchmal werden Themen etwas **zu schnell** behandelt, wenn man selbst Notizen machen will, vor allem Beweise“

„**Tempo könnte** an einigen Stellen deutlich **höher sein** (vor allem Beweise)“

Kommentare: Tafel vs. Beamer

... besonders gut gefallen?

Verbesserungswünsche?

„Sehr gute Folien (interaktiv)“

„Bunte Folien, Schemata und Veranschaulichungen leicht verständlich“

„Sehr übersichtl. Folien“

„die Folien, die im Internet zur Verfügung stehen, finde ich prima“

„excellente Latex-Folien“

„Verständliche Folien“

„sehr anschauliche und erklärende Folien, die auch nachvollziehbar online sind“

„Tafelschriebe helfen mir konzentrierter zu bleiben“

„Verhältnis Powerpoint<->Tafel mehr zu Gunsten der Tafel verschieben. Bei ppt-Folien bleibt zu wenig hängen bzw. das Tempo erhöht sich.“

Kommentare: Zusammenfassungen und Wiederholungen

... besonders gut gefallen?

Verbesserungswünsche?

„Regelmäßiges Zusammenfassen des Stoffes“

„Wiederholungen“

„Wiederholungen zur Festigung des Stoffes“

„Die Zusammenfassungen und Wiederholungen des bereits abgeschlossenen Stoffes sind viel zu Ausführlich“

„nicht alles 3 mal erklären, man versteht es beim ersten mal“

„Mehr Wiederholungen. Explain it like I'm 5“

Kommentare: Politik

... besonders gut gefallen?

Verbesserungswünsche?

„‘politische’ Statements“

„Blick über den Tellerrand der Vorlesung, durch Kommentare zur Politischen Situation“

„Zu viel Politik“

„bitte keine Werbung für ‘Herz-statt-Hetze’ oder ähnliches“

„keine/weniger politische Statements in Vorlesungen, Forschung + Lehre sollten neutral sein“

Ankündigung

Weitere Kommentare
(gesellschaftspolitisch oder anderweitig)?

Dann kommen Sie zum

Professorenstammtisch

11.1.2017
18:30 Uhr
Im „Campus“

Logik für Informatiker

Warum?

Logik

Logik für Informatiker: Darum (1)

$$\frac{\text{Logik}}{\text{Informatik}} = \frac{\text{Analysis}}{\text{Ingenieurwesen}}$$

„Wer rechnende Systeme verstehen und konstruieren will, der benötigt passende mathematische Modelle. Dieser Weg führt oftmals zur Logik.“

- Modellierung von Programmlogik und logischen Schaltungen
- Berechnung praktisch relevanter Eigenschaften durch logisches Schließen
- Hauptanwendung: **Verifikation von Systemen**

Logik = Wissenschaft vom folgerichtigen Denken

„Wer intelligente Software entwickeln will, der muss logische Schlussfolgerungen algorithmisch umsetzen. Die Logik liefert die nötigen Methoden.“

- Kodierung von gültigen Zusammenhängen und Regeln
- Logisches Schließen als Simulation von intelligentem Denken
- Hauptanwendung: **Künstliche Intelligenz**

Logisches Schließen = Problemlösen

„Bedeutende Klassen von (schweren) Problemen lassen sich durch logische Schlussfolgerung lösen. Algorithmen aus der Logik sind in vielen anderen Bereichen anwendbar.“

- Logik als Spezifikationssprache für komplexe Probleme
- Logisches Schließen als Suche nach zulässigen Lösungen
- Anwendungen: **Constraint-Satisfaction-Probleme** und verwandte Optimierungsaufgaben

Logiken = Beschreibungssprachen

„Überall wo Informationen maschinell kodiert werden und wo exakt spezifiziert ist, was eine Anwendung aus dieser Kodierung ableiten darf, hat man es mit einer Art Logik zu tun.“

- Logik als Oberbegriff exakt spezifizierter Datenformate
- Schlussfolgerung zur Interpretation/Analyse/Optimierung
- Anwendungen: **Wissensrepräsentation** und **Datenbanken**

„Logik“ ist ein allgemeiner Oberbegriff für viele mathematische und technische Formalismen, gekennzeichnet durch:

- **Syntax**: Sprache einer Logik (normalerweise Formeln mit logischen Operatoren)
- **Semantik**: Definition der Bedeutung (Worauf beziehen sich die Formeln? Wann ist eine Formel wahr oder falsch?)

Typische Zielstellung: **Logische Schlussfolgerung**

- Welche Schlüsse kann man aus einer gegebenen (Menge von) Formel(n) ziehen?
- Spezifikation der korrekten Schlussfolgerungen sollte sich aus Semantik ergeben
- Praktische Berechnung von Schlussfolgerungen ist oft kompliziert

Viele Logiken

Es gibt sehr viele Logiken, z.B.

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (erster Stufe)
- Prädikatenlogik zweiter Stufe
- Beschreibungslogiken (Wissensrepräsentation und KI)
- Temporallogiken (z.B. Verifikation zeitlicher Abläufe)
- Logikprogramme (Answer Set Programming, Prolog, ...)
- Nicht-klassische Logiken (z.B. intuitionistische Logik)
- Mehrwertige Logiken (z.B. probabilistische Logik)
- ... und viele andere mehr

↪ In dieser Vorlesung lernen wir zunächst **Aussagenlogik** kennen

(Mehr gibt es in der Vorlesung „Theoretische Informatik und Logik“)

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik untersucht **logische Verknüpfungen von atomaren Aussagen**.

Atomare Aussagen sind Behauptungen, die wahr oder falsch sein können, z.B.:

- A1 „Morgen schneit es.“
- A2 „Wir werden einen Schneemann bauen.“
- B1 „Die Vorstellung von der globalen Erderwärmung wurde von den Chinesen erfunden.“
- B2 „Die Temperatur der Ozeane ist seit 1998 in unverminderter Geschwindigkeit angestiegen.“
- C1 „Typ-2-Sprachen sind unter Schnitt abgeschlossen.“
- C2 „Typ-2-Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.“
- C3 „Typ-2-Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.“

Aussagenlogik

Aussagen verknüpfen

Atomare Aussagen können mithilfe logischer **Junktoren** verknüpft werden:

- $A1 \rightarrow A2$: „Wenn es morgen schneit, dann werden wir einen Schneemann bauen.“
- $A1 \vee \neg A1$: „Entweder schneit es morgen oder nicht.“
- $B1 \rightarrow \neg B2$: „Falls die Chinesen die globale Erwärmung erfunden haben, dann steigt die Temperatur der Ozeane nicht unvermindert an.“
- $(C1 \wedge C2) \rightarrow C3$: „Sind Typ-2-Sprachen unter Schnitt und Komplement abgeschlossen, dann sind sie auch unter Vereinigung abgeschlossen.“

Logisches Schließen

Wenn einige Formeln als wahr angenommen werden, dann kann die Wahrheit anderer Formeln daraus abgeleitet werden.

Beispiele:

- Aus $B2$ und $B1 \rightarrow \neg B2$ folgt $\neg B1$
- Aus $C1$, $\neg C3$ und $(C1 \wedge C2) \rightarrow C3$ folgt $\neg C2$
- Aus $A1 \rightarrow A2$ und $\neg A1$ folgt **nicht** $\neg A2$

Die Gültigkeit bestimmter Schlussfolgerungen hat nichts mit Schneemännern, Erderwärmung oder Typ-2-Sprachen zu tun! Sie ist eine rein logische Konsequenz.

Aussagenlogik: Syntax

Wir betrachten eine abzählbar unendliche Menge \mathbf{P} von **atomaren Aussagen** (auch bekannt als: **aussagenlogische Variablen**, **Propositionen** oder schlicht **Atome**)

Die Menge der **aussagenlogischen Formeln** ist induktiv^a definiert:

- Jedes Atom $p \in \mathbf{P}$ ist eine aussagenlogische Formel
- Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, so auch:
 - $\neg F$: **Negation**, „nicht F “
 - $(F \wedge G)$: **Konjunktion**, „ F und G “
 - $(F \vee G)$: **Disjunktion**, „ F oder G “
 - $(F \rightarrow G)$: **Implikation**, „ F impliziert G “
 - $(F \leftrightarrow G)$: **Äquivalenz**, „ F ist äquivalent zu G “

^aDas bedeutet: Die Definition ist selbstbezüglich und soll die kleinste Menge an Formeln beschreiben, die alle Bedingungen erfüllen.

Wir verzichten hier oft auf „aussagenlogisch“ und sprechen z.B. einfach von „Formeln“.

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“

Barbara behauptet: „Chris lügt!“

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Beispiele

Die folgenden Ausdrücke sind aussagenlogische Formeln:

- p
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- $\neg\neg\neg p$

Die folgenden Ausdrücke sind **keine** aussagenlogischen Formeln:

- $p \wedge q \vee r$ (fehlende Klammern)

Vereinfachung: Äußere Klammern dürfen wegfallen, d.h. wir erlauben z.B. $p \rightarrow q$ anstatt auf $(p \rightarrow q)$ zu bestehen.

- $(p \leftarrow q)$ (Operator \leftarrow undefiniert)
- $\overline{p \wedge q}$ (wir verwenden \neg nicht als Negation)

Teilformeln

Wir können Formeln als Wörter über (endlichen Teilmengen aus) dem unendlichen Alphabet $\mathbf{P} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$ sehen:

$$F \rightarrow \mathbf{P} \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \rightarrow F) \mid (F \leftrightarrow F)$$

Eine **Teilformel** ist ein Teilwort (Infix) einer Formel, welches selbst eine Formel ist. Teilformeln werden auch **Unterformeln** genannt.

Alternativ kann man Teilformeln auch rekursiv definieren:

Die Menge $\text{Sub}(F)$ der Teilformeln einer Formel F ist definiert als:

$$\text{Sub}(F) = \begin{cases} \{F\} & \text{falls } F \in \mathbf{P} \\ \{\neg G\} \cup \text{Sub}(G) & \text{falls } F = \neg G \\ \{(G_1 \wedge G_2)\} \cup \text{Sub}(G_1) \cup \text{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \wedge G_2) \\ \{(G_1 \vee G_2)\} \cup \text{Sub}(G_1) \cup \text{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \vee G_2) \\ \{(G_1 \rightarrow G_2)\} \cup \text{Sub}(G_1) \cup \text{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \rightarrow G_2) \\ \{(G_1 \leftrightarrow G_2)\} \cup \text{Sub}(G_1) \cup \text{Sub}(G_2) & \text{falls } F = (G_1 \leftrightarrow G_2) \end{cases}$$

Semantik

Was bedeutet eine aussagenlogische Formel?

- Atome an sich bedeuten zunächst nichts
 \leadsto sie können einfach wahr oder falsch sein
- Je nachdem, welche Atome wahr sind und welche falsch, ergeben sich verschiedene „Interpretationen“
 \leadsto dargestellt durch **Wertzweisungen**
 (Funktionen von \mathbf{P} nach $\{1, 0\}$; 1=„wahr“ und 0=„falsch“)
- Die Wahrheit (oder Falschheit) einer Formel ergibt sich aus dem Wahrheitswert der in ihr vorkommenden Atome
 \leadsto Wertzweisungen machen Formeln wahr oder falsch

Die Bedeutung einer Formel besteht darin, dass sie uns Informationen darüber liefert, welche Wertzweisungen möglich sind, wenn die Formel wahr sein soll.

Wertzweisungen können Formeln erfüllen

Eine **Wertzweisung** ist eine Funktion $w : \mathbf{P} \rightarrow \{1, 0\}$

Eine Wertzweisung w erfüllt eine Formel F , in Symbolen $w \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von F	$w \models F$ wenn:	$w \not\models F$ wenn:
$F \in \mathbf{P}$:	$w(F) = 1$	$w(F) = 0$
$F = \neg G$	$w \not\models G$	$w \models G$
$F = (G_1 \wedge G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ oder $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \vee G_2)$	$w \models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \rightarrow G_2)$	$w \not\models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \leftrightarrow G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \models G_2$

Dabei bedeutet „A oder B“ immer „A oder B oder beides“.

Formeln Wahrheitswerte zuweisen

Wir können Wertzweisungen von Atomen auf Formeln erweitern:

$$w(F) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \models F \\ 0 & \text{falls } w \not\models F \end{cases}$$

Wahrheitstabelle illustrieren die Semantik der Junktoren:

		$w(F)$	$w(\neg F)$			
		0	1			
		1	0			
$w(F)$	$w(G)$	$w(F \wedge G)$	$w(F \vee G)$	$w(F \rightarrow G)$	$w(F \leftrightarrow G)$	
0	0	0	0	1	1	
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	

Wahrheitswerte von Formeln bestimmen

- Der Wahrheitswert einer Formel hängt nur vom Wahrheitswert der (endlich vielen) Atome ab, die in ihr vorkommen.
 \leadsto Wir geben oft nur diese an.
- Der Wahrheitswert einer Formel ergibt sich rekursiv aus dem Wahrheitswert ihrer Teilformeln.
 \leadsto Darstellung in Wahrheitstabelle

Beispiel: Für die Formel $F = ((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$ und Wertzuweisung w mit $w(p) = 0$ und $w(q) = 1$ ergibt sich die folgende Tabelle:

$w(p)$	$w(q)$	$w(p \rightarrow q)$	$w(\neg p)$	$w(\neg q)$	$w(\neg q \rightarrow \neg p)$	$w(F)$
0	1	1	1	0	1	1

Logische Konsequenzen

Eine Wertzuweisung w ist **Modell einer Formel F** wenn $w \models F$ (also wenn $w(F) = 1$). Ist \mathcal{F} eine (möglicherweise unendliche) Menge von Formeln, dann ist w ein **Modell der Menge \mathcal{F}** wenn $w \models F$ für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $w \models \mathcal{F}$.

Die logischen Schlussfolgerungen aus einer Formel(menge) ergeben sich aus ihren Modellen:

Sei \mathcal{F} eine Menge von Formeln. Eine Formel G ist eine **logische Konsequenz** aus \mathcal{F} wenn jedes Modell von \mathcal{F} auch ein Modell von G ist. In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{F} \models G$.

- \leadsto Die Formeln in \mathcal{F} schränken die möglichen Interpretationen ein: Je mehr Formeln wahr sein sollen, desto weniger Freiheiten gibt es bei der Wahl der Modelle
- \leadsto G ist eine logische Konsequenz wenn gilt: falls \mathcal{F} wahr ist, dann ist auch G garantiert wahr

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Wer lügt?

(Und wie kann man das beweisen?)

Beispiel: Logelei

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \leftrightarrow \neg B)$	$w(B \leftrightarrow \neg C)$	$w(C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Beispiel: Logelei (2)

Anna behauptet: „Barbara lügt!“ $A \leftrightarrow \neg B$

Barbara behauptet: „Chris lügt!“ $B \leftrightarrow \neg C$

Chris behauptet: „Anna und Barbara lügen!“ $C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$w(A) \quad w(B) \quad w(C) \quad w(A \leftrightarrow \neg B) \quad w(B \leftrightarrow \neg C) \quad w(C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B))$

0 1 0 1 1 1

\leadsto Genau ein Modell (bezüglich der relevanten Atome)

Logische Konsequenzen: Alle Formeln, die unter einer Wertzuweisung mit $w(A) = 0$, $w(B) = 1$ und $w(C) = 0$ wahr sind, z.B.:

- $\neg A$ („Anna lügt“)
- $\neg C$ („Chris lügt“)
- $\neg A \wedge \neg C$ („Anna und Chris lügen“)
- B („Barbara sagt die Wahrheit“)
- Aber auch: $D \vee \neg D$

Allgemeingültigkeit und Co.

Eine Formel F ist:

- **unerfüllbar** (oder **inkonsistent**), wenn sie keine Modelle hat
- **erfüllbar** (oder **konsistent**), wenn sie Modelle hat
- **allgemeingültig** (oder eine **Tautologie**), wenn alle Wertzuweisungen Modelle für die Formel sind
- **widerlegbar**, wenn sie nicht allgemeingültig ist

Diese Begriffe kann man für Mengen von Formeln genauso definieren.

Beispiel:

- $p \wedge \neg p$ ist unerfüllbar (und widerlegbar)
- $p \vee \neg p$ ist allgemeingültig (und erfüllbar)
- $p \wedge q$ ist erfüllbar und widerlegbar

Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit

Satz:

- (1) Eine allgemeingültige Formel ist logische Konsequenz jeder anderen Formel(menge).
- (2) Eine unerfüllbare Formel(menge) hat jede andere Formel als logische Konsequenz.

Beweis: Folgt direkt aus Definition von logischer Konsequenz. Für (2) ist es wichtig, dass eine Eigenschaft „für alle Modelle“ gilt, wenn es keine Modelle gibt (sie gilt dann für „alle null Modelle“). \square

Der unerwartete(?) Effekt (2) ist im Deutschen sprichwörtlich:

„Wenn das stimmt, dann bin ich der Kaiser von China!“

drückt aus, dass aus einer mutmaßlich falschen Annahme alles folgt, selbst wenn es offensichtlich unwahr ist.

Zusammenfassung und Ausblick

Mithilfe der **Aussagenlogik** kann man logische Beziehungen atomarer Aussagen spezifizieren

Wertzuweisungen können eine aussagenlogische Formel erfüllen – dann nennt man sie **Modell** – oder widerlegen

Die Modelle einer Formel(menge) definieren ihre **logischen Konsequenzen** (=„alles, was in diesen Fällen noch gilt“)

Offene Fragen:

- Geht logisches Schließen auch ohne Wahrheitswertetabellen?
- Wie (in)effizient ist logisches Schließen?
- Was hat das mit Sprachen, Berechnung und TMs zu tun?