Technische
Universität
Dresden

Formale Systeme

10. Vorlesung: Grenzen regulärer Sprachen / Probleme für Automaten

Markus Krötzsch

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 17. November 2025

Minimale Automaten

Für jede reguläre Sprache **L**

- ... gibt es einen minimalen (totalen) DFA
- ... der eindeutig ist bis auf Umbenennung von Zuständen
- ... den man durch Reduktion jedes beliebigen DFA für **L** erhalten kann
- ... oder auch als Myhill-Nerode-Minimalautomat

Allerdings ist der minimale DFA unter Umständen viel größer als ein minimaler NFA (dafür ist letzterer schwerer zu finden und nicht eindeutig)

Nichtreguläre Sprachen

Nichtreguläre Sprachen

Sind alle Sprachen regulär?
Sicher nicht (dazu gibt es zu viele Sprachen)

Sind alle Typ-0-Sprachen regulär?
Nein, auch das gilt nicht

Wie aber zeigt man das?

- Behauptung „Sprache **L** ist regulär!“ $\rightsquigarrow$ es genügt, einen Automaten, regulären Ausdruck oder eine Typ-3-Grammatik für **L** anzugeben
- Behauptung „Sprache **L** ist nicht regulär!“ $\rightsquigarrow$ man müsste zeigen, dass es keinen Automaten, keinen regulären Ausdruck bzw. keine Typ-3-Grammatik für **L** gibt

Nichtregularität mit Myhill & Nerode

Myhill & Nerode liefern uns ein besseres Kriterium:

Satz (Myhill & Nerode): Eine Sprache **L** ist genau dann regulär, wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Daraus folgt:

Satz: Wenn $\simeq_{\mathbf{L}}$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat, dann ist **L** nicht regulär.

Beispiel: Wir haben gesehen, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ unendlich viele Äquivalenzklassen erzeugt. Diese Sprache ist demnach nicht regulär.

Die Sprache $a^n b^n$ gilt als Musterbeispiel nichtregulärer Sprachen

Intuition: „Reguläre Sprachen können nicht zählen.“

Ein Automat, der diese Sprache erkennen wollte, müsste die genaue Zahl der schon gelesenen as speichern

$\rightsquigarrow$ beliebig viel Speicher nötig

Viele Sprachdefinitionen mit Bezug zu konkreten Zahlen verhalten sich ähnlich

Nichtregularität mit Abschlusseigenschaften

Wir haben bereits gezeigt:

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ regulär sind, dann auch $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^*$ und $\overline{\mathbf{L}}_1$.

Auch hier liefert die Umkehrung gute Kriterien, z.B.

Satz: Wenn $\mathbf{L}_1$ regulär und $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ nicht regulär ist, dann ist $\mathbf{L}_2$ ebenfalls nicht regulär.

Beispiel: Wir betrachten über dem Alphabet $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ die Sprache
$\mathbf{L} = \{w \mid w \text{ enthält ebenso viele } \mathrm{a} \text{ wie } \mathrm{b}\}$.

Dann gilt $\mathbf{L} \cap \{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}^* = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \mid n \geq 0\}$.

Weil $\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{b}\}^*$ regulär ist und $\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n \mid n \geq 0\}$ nicht, kann $\mathbf{L}$ ebenfalls nicht regulär sein.

Nichtregularität durch Pumpen

Ein weiteres klassisches Kriterium für Nichtregularität ist, dass die Wörter regulärer Sprachen beliebig „aufgepumpt“ werden können.

Idee:

- Jeder DFA hat nur endlich viele Zustände n
- Aber manche reguläre Sprachen enthalten beliebig lange Wörter

Wie kann ein DFA Wörter mit mehr als n Zeichen akzeptieren?

- Dann muss der DFA beim Einlesen einen Zustand mehr als einmal besuchen
- Dafür muss es in den Zustandsübergangen eine Schleife geben
- Diese Schleife kann man aber auch mehr als einmal durchlaufen

Jedes akzeptierte Wort mit $\geq n$ Zeichen hat einen Teil, den man beliebig oft wiederholen – „aufpumpen“ – kann

Das Pumping-Lemma

Satz (Pumping-Lemma): Für jede reguläre Sprache **L**
gibt es eine Zahl $n \geq 0$, so dass gilt:
für jedes Wort $z \in \mathbf{L}$ mit $|z| \geq n$
gibt es eine Zerlegung $z = uvw$ mit $|v| \geq 1$ und $|uv| \leq n$, so dass:
für jede Zahl $k \geq 0$ gilt: $uv^k w \in \mathbf{L}$

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ ein DFA für **L** mit $|Q|$ Zuständen. Wir wählen $n = |Q| + 1$.
Ein akzeptierender Lauf für ein beliebiges Wort z mit $|z| = \ell \geq n$ muss in den ersten n Schritten einen Zustand p zweimal besuchen (sagen wir: nach i und j Schritten), hat also die Form:

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \dots \xrightarrow{z_{i-1}} q_{i-1} \xrightarrow{z_i} p \xrightarrow{z_{i+1}} q_{i+1} \xrightarrow{z_{i+2}} \dots \xrightarrow{z_{j-1}} q_{j-1} \xrightarrow{z_j} p \xrightarrow{z_{j+1}} q_{j+1} \xrightarrow{z_{j+2}} \dots \xrightarrow{z_\ell} q_\ell$$

Die gesuchte Zerlegung ist $u = z_1 \cdots z_i$, $v = z_{i+1} \cdots z_j$, $w = z_{j+1} \cdots z_\ell$.
Der Lauf $(q_0 \dots q_{i-1}p)(q_{i+1} \dots q_{j-1}p)^k(q_{j+1} \dots q_\ell)$ akzeptiert $uv^k w$. □

Beispiel

Beispiel: Die Sprache von $\mathtt{b}^*(\mathtt{ab}^*\mathtt{ab}^*)^*$ (Wörter mit gerader Anzahl $\mathtt{a}s$). Der Parameter n aus dem Pumping-Lemma kann 2 sein:

- Wenn z die Form $\mathtt{b}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$
- Wenn z die Form $\mathtt{ab}y$ hat, wähle $u = \mathtt{a}$, $v = \mathtt{b}$ und $w = y$
- Wenn z die Form $\mathtt{aa}y$ hat, wähle $u = \epsilon$, $v = \mathtt{aa}$ und $w = y$

Beispiel: Für endliche Sprachen ist die Eigenschaft trivial. Man wählt n einfach so groß, dass es keine Wörter z mit $|z| \geq n$ gibt, für welche weitere Eigenschaften gefordert werden.

Pumpen für Nichtregularität

Die Pump-Eigenschaft ist für Regularität notwendig, aber nicht hinreichend: man kann auch manche nichtreguläre Sprachen pumpen.

Daher eignet sich das Pumping-Lemma eher zum Beweis der Nichtregularität

Beispiel: Sei $\mathbf{L} = \{\mathrm{a}^k \mid k \text{ ist Primzahl}\}$.

Angenommen es gäbe einen Wert n für den diese Sprache aufgepumpt werden kann. Es gibt eine Primzahl $\ell > n + 2$. Laut Pump-Eigenschaft finden wir eine Zerlegung von $\mathrm{a}^\ell = uvw$ für die insbesondere gilt $uv^{|uw|}w \in \mathbf{L}$. Aber $uv^{|uw|}w = \mathrm{a}^{(|v|+1)|uw|} \notin \mathbf{L}$. Widerspruch.

L ist daher nicht regulär.

Ist das Pumping-Lemma sinnvoll?

- **Kontra:** Myhill-Nerode liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Regularität
  $\leadsto$ immer anwendbar, um (Nicht)Regularität zu zeigen
- **Pro:** Pumping funktioniert in den allermeisten praktischen Fällen auch (notfalls kann man Abschlusseigenschaften zu Hilfe nehmen)
- **Pro:** Manchmal ist der Beweis mit Pumping einfacher
- **Kontra:** Das formale Pumping-Lemma ist relativ kompliziert
- **Pro:** Die Pumping-Idee ist intuitiv und wir werden sie später noch einmal bei kontextfreien Sprachen nutzen

Algorithmen für Automaten

Wichtige Probleme für Sprachen

Das Wortproblem für eine Sprache **L** über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}$

Ziel bei der Lösung des Wortproblems:

- Finde einen Algorithmus, der diese Funktion berechnet
- Die Sprache **L** ist nicht Teil der Eingabe, sondern fester Bestandteil des Algorithmus
- Es ist daher unerheblich, wie wir Sprachen darstellen (Grammatik, Automat, . . .)

Wichtige Probleme für Automaten

Das Wortproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$
Ausgabe: „ja“ wenn $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$ und „nein“ wenn $w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M})$

- Hier ist die Sprache (gegeben als FA) Teil der Eingabe
- Die Repräsentation (DFA oder NFA?) spielt unter Umständen eine wichtige Rolle

Das Leerheitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ und „nein“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

Wichtige Probleme für Automaten (2)

Das Inklusionsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Das Äquivalenzproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Manche Probleme kann man mittels anderer ausdrücken:

- $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ und $\mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$
- $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ gdw. $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_\emptyset)$, wobei $\mathcal{M}_\emptyset$ ein FA ist, der keine Wörter akzeptiert

Wir werden noch mehr solche Reduktionen sehen.

Das Leerheitsproblem für DFA und NFA

Das Leerheitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ und „nein“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

Anwendungsbeispiel: Konsistenzprüfung einer Systemspezifikation

- In der formalen Verifikation kann (erwünschtes) Systemverhalten mit Automaten dargestellt werden
- Wörter entsprechen z.B. erlaubten Programmdurchläufen
- Leerheitstest: prüfe, ob die Spezifikation überhaupt erfüllt werden kann

Komplexität des Leerheitsproblems

Das Leerheitsproblem ist leicht zu lösen:

Satz: Die Leerheit eines NFA (oder auch DFA) kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Leerheit = „Es gibt keinen von einem Startzustand aus erreichbaren Endzustand“

Erreichbarkeit von Endzuständen kann mithilfe von Graphalgorithmen zur Erreichbarkeitsprüfung (Breadth-First-Search, Depth-First-Search, . . .) getestet werden. Einfache Algorithmen laufen in $O(|Q| \times |\delta|)$, wobei $|Q|$ die Zahl der Zustände und $|\delta|$ die Gesamtzahl der Kanten im Graph des Automaten ist. □

Das Inklusionsproblem für DFA und NFA

Das Inklusionsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Anwendungsbeispiel: Verifikation einer Systemspezifikation

- Spezifiziere erwünschtes Systemverhalten als Automat $\mathcal{M}_{\text{spec}}$
- Abstrahiere tatsächliches Systemverhalten durch Automat $\mathcal{M}_{\text{sys}}$
- Inklusionstest $\mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{sys}}) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_{\text{spec}})$: Prüfe, ob System Spezifikation erfüllt

Lösen des Inklusionsproblems

Wie kann man $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ testen?

Reduktion auf Leerheitsproblem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \quad & \text{gdw} \quad \text{für jedes } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \text{ gilt } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \\
& \text{gdw} \quad \text{es gibt kein } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \text{ mit } w \notin \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \\
& \text{gdw} \quad \text{es gibt kein } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) \\
& \text{gdw} \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap (\Sigma^* \setminus \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)) = \emptyset \\
& \text{gdw} \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \overline{\mathbf{L}(\mathcal{M}_2)} = \emptyset \\
& \text{gdw} \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathbf{L}(\overline{\mathcal{M}_2}) = \emptyset \\
& \text{gdw} \quad \mathbf{L}(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}) = \emptyset
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ kann effektiv überprüft werden

Komplexität des Inklusionsproblems

Wie aufwändig ist es, $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1 \otimes \overline{\mathcal{M}_2}) = \emptyset$ zu testen?

- Komplementbildung: linear für DFAs,
  exponentiell für NFAs (Determinisierung nötig!)
- Produktautomat: polynomiell
- Leerheitstest: polynomiell

Satz: Für NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ kann $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$ ...

- in exponentieller Zeit entschieden werden
- in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn $\mathcal{M}_2$ DFA ist

- Es ist bisher nicht bewiesen, dass es im NFA-Fall keinen besseren Algorithmus gibt
- Ergebnisse aus der Komplexitätstheorie legen das aber nahe
  (das Problem ist PSpace-vollständig)
- Obwohl der Worst Case bei jedem bekannten Verfahren exponentiell ist, gibt es praktische Algorithmen, die in vielen Fällen deutlich besser sind als das obige

Das Äquivalenzproblem für DFA und NFA

Das Äquivalenzproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: zwei FAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ über Alphabet Σ
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$; andernfalls „nein“

Anwendungsbeispiel: Anfrageoptimierung in Graphdatenbanken

- Graphdatenbanken erlauben die Suche nach Pfaden, die regulären Ausdrücken entsprechen
- Einmal berechnete Ergebnisse werden zwischengespeichert (Cache)
- Äquivalenztest: Prüfe, ob eine gecachete Anfrage äquivalent zu einer neu eingehenden Anfrage ist

Komplexität des Äquivalenzproblems

Das Äquivalenzproblem kann auf das Inklusionsproblem reduziert werden:

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \text{ gdw. } \mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \text{ und } \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{M}_1)$$

Daraus ergibt sich eine obere Schranke der Komplexität:

Satz: Für NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ kann $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$

- in exponentieller Zeit entschieden werden
- in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ DFAs sind

Auch hier ist nicht bekannt, ob es für den Worst Case effizientere Algorithmen geben könnte, aber es gilt als sehr unwahrscheinlich

Das Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz: Das Wortproblem für DFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Beweis: Es genügt, den DFA für $|w|$ Schritte zu simulieren und zu prüfen, ob danach ein Endzustand erreicht ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathrm{a})$ ist in polynomieller Zeit möglich – die Details hängen davon ab, wie genau $\mathcal{M}$ in der Eingabe kodiert wurde. □

Satz: Das Wortproblem für reguläre Sprachen kann in linearer Zeit $O(|w|)$ entschieden werden.

Beweis: Man kann den DFA als gegebenen Bestandteil des Problems annehmen, der nicht Teil der Eingabe ist. Die Berechnung von $\delta(q, \mathrm{a})$ kann daher in konstanter Zeit erfolgen kann (die Zeit hängt vom Automaten ab, aber nicht von der Eingabe). Die Simulation benötigt daher insgesamt $|w|$ Rechenschritte. □

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}_w \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 2

Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

- Initialisiere $Z := Q_0$
- Für jedes Symbol σ_i in $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$:
  Berechne $Z := \bigcup_{q \in Z} \delta(q, \sigma_i)$
- Für alle $q \in F$:
  Falls $q \in Z$: das Ergebnis ist „ja“
- Falls kein $q \in F \cap Z$ gefunden wurde: das Ergebnis ist „nein“

Alle Teilberechnungen können in polynomieller Zeit ausgeführt werden, sofern $\mathcal{M}$ „vernünftig“ kodiert wird

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

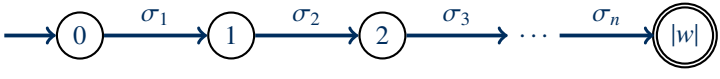
Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Details: Variante 3

Der Automat $\mathcal{M}_w$ für $w = \sigma_1 \cdots \sigma_{|w|}$ ist leicht gefunden:



Eingabe: NFA $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, Q_0, F \rangle$ und Wort w
Ausgabe: Ist $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$?

(1) Konstruiere $\mathcal{M}_w$

(2) Berechne Produktautomat $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w$

(3) Entscheide ob $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Das Wortproblem für NFAs

Was tun, wenn ein NFA gegeben ist?

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen
Exponentieller Algorithmus: Potenzmengen-DFA ist exponentiell groß

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)
Polynomieller Algorithmus: Zustandsmengen sind von linearer Größe; Berechnung der Nachfolgemenge als Vereinigung linear vieler δ-Ergebnismengen

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$
Polynomieller Algorithmus: $\mathcal{M}_w$ ist linear in $|w|$; Schnittmengen-DFA ist quadratisch groß; Leerheitstest ist polynomiell in dieser Größe

Wortproblem für NFAs – Komplexität

Variante 1: NFA in DFA umwandeln (Potenzmengenkonstruktion),
Wortproblem für DFA lösen

Variante 2: NFA direkt mit Zustandsmengen simulieren
(vergleichbar „on-the-fly Version von Variante 1“)

Variante 3: Konstruiere einen DFA $\mathcal{M}_w$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{M}_w) = \{w\}$ und prüfe ob $\mathbf{L}(\mathcal{M}) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_w) \neq \emptyset$

Mit Variante 2 und 3 erhalten wir:

Satz: Das Wortproblem für NFAs kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Weitere Probleme für Automaten

Das Endlichkeitsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ endlich ist; andernfalls „nein“

Idee wie Pumping-Lemma: unendliche Sprachen erfordern Zyklus
$\rightsquigarrow$ suche nach Zyklen, die auf einem Pfad von einem Start- zu einem Endzustand liegen (polynomiell)

Das Universalitätsproblem für FAs über Alphabet Σ besteht darin, die folgende Funktion zu berechnen:

Eingabe: ein FA $\mathcal{M}$
Ausgabe: „ja“ wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$; andernfalls „nein“

Komplement des Leerheitsproblems: $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$ wenn $\mathbf{L}(\overline{\mathcal{M}}) = \emptyset$
$\rightsquigarrow$ Komplexität abhängig von FA-Komplementierung

Zusammenfassung und Ausblick

Es gibt viele nichtreguläre Sprachen, was man mit verschiedenen Methoden beweisen kann (Myhill-Nerode, Abschlusseigenschaften, Pumping)

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht regulär, da FAs nicht zählen können

Algorithmische Probleme zu Automaten sind Leerheit, Inklusion, Äquivalenz, Universalität, Endlichkeit und das Wortproblem

Für DFAs können sie in polynomieller Zeit gelöst werden, für NFAs dagegen zum Teil nur in exponentieller

Offene Fragen:

- Wir haben schon so viel über reguläre Sprachen gelernt – könnten wir das bitte noch einmal alles zusammenfassen?
- Und was ist mit kontextfreien Sprachen?