TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik / Institut für Theoretische Informatik – Wissensbasierte Systeme

Prof. Markus Krötzsch | Dr. Stephan Mennicke

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2024

Probeklausur

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Gilt NL = ExpTime, dann ist das Halteproblem entscheidbar.

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)\big)$ ist wahr.

e) Die Beantwortung von Datenbankanfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? (2)

b) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich? (4)

c) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome? (2)

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet. Dabei dürfen Sie die Abkürzungen für Zuweisung von Konstanten, `IF` und die arithmetischen Operationen (`+`, `-`, `*`, `/`) zwischen Variablen benutzen. Erläutern Sie die Arbeitsweise Ihres Programms.

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

In der Vorlesung wurde das Postsche Korrespondenzproblem vorgestellt:

Problem: **PCP**

Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.

Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (2)

$$(ab, a),\ (a, a),\ (cd, bcd)$$

Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \ldots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist. (3)

c) Ist die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

In der Vorlesung wurden das folgende Problem vorgestellt:

Problem: **SAT**

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform (KNF).

Gefragt: Gibt es eine Belegung der Atome in F, die F wahr macht?

Wir verwenden außerdem das folgende Problem:

Problem: **Stabile Menge**

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$.

Gefragt: Gibt es eine Menge $M \subseteq V$, die die folgenden Bedingungen erfüllt?

a) Für alle $m, n \in M$ gilt, dass $(m, n) \notin E$;
b) für alle $n \in V \setminus M$ gilt, dass es ein $m \in M$ gibt mit $(m, n) \in E$.

Betrachten Sie nun folgenden Versuch, das Problem **SAT** auf das Problem **Stabile Menge** zu reduzieren.

Wir definieren nachfolgend eine Funktion, die aussagenlogische Formeln in KNF auf gerichtete Graphen abbildet. Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine Formel mit m Klauseln und $K_i = L_{i,1} \vee \ldots \vee L_{i,j_i}$ für $1 \leq i \leq m$. Wir konstruieren den Graphen $G_F = (V, E)$ wie folgt: $V = \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,j_i}, v_{2,1}, \ldots, v_{m,j_m}\}$, d.h. für jede Klausel in F und für jedes Literal in jeder Klausel K_i bekommt G_F einen Knoten; $E = \{(u_i, u_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{i,j}, u_i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq j_i\} \cup \{(v_{i,j}, v_{x,y}), (v_{x,y}, v_{i,j}) \mid L_{i,j} = \neg L_{x,y}\}$, d.h. (1) für jede Klausel hat ihr Knoten eine Kante zu sich selbst; (2) der Knoten eines Literals hat eine Kante zum Knoten einer Klausel, wann immer das Literal in der Klausel vorkommt; und (3) zwei Literal-Knoten werden in beide Richtungen per Kante miteinander verbunden, wenn ihre Literale zueinander widersprüchlich sind.

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.) (3)

   Hat G_F eine stabile Menge? Markieren Sie sie in der Skizze.

b) Was müsste gezeigt werden, um zu beweisen, dass die angegebene Funktion tatsächlich eine polynomielle Reduktion von **SAT** auf **Stabile Menge** darstellt? Es genügt, wenn Sie die konkret zu zeigenden Aussagen auflisten, den Beweis selbst müssen Sie nicht durchführen. (3)

c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt? (1)

   (1) **Stabile Menge** ist in NP.

   (2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \wedge \forall x,y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \wedge \forall x,y,z.((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\,(m,n) \mid m \leq n\,\}$;

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\,(x,y) \mid |x| = |y|\,\}$;

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und
$p^{\mathcal{I}_3} = \{\,(m,n) \mid \text{es gibt } p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7, \text{ so dass } m = p \cdot 7 + r \text{ und } n = q \cdot 7 + r\}$;

d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$ und
$p^{\mathcal{I}_4} = \{\,(x,y) \mid x \text{ und } y \text{ enden mit verschiedenen Symbolen}\}$.

Aufgabe 7 **(8 Punkte)**

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$\begin{aligned} O(x,y) &\leftarrow n(x,y) \\ O(x,z) &\leftarrow O(x,y) \wedge n(y,z) \\ R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge O(x,y) \\ R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge R(y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} n(a,b) & n(b,c) & n(c,d) & n(d,e) \\ s(a,b) & s(c,a) & s(b,d) & s(b,e) \end{array}$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$.

Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

Aufgabe 8 **(12 Punkte)**

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G. (6)

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$

$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln (6)

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x,y)\}$$
$$(2) \quad \{p(x), q(x,f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c,v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.