



Übungen zur Lehrveranstaltung  
**Theoretische Informatik und Logik**

Sommersemester 2022

**4. Übungsblatt**

Woche vom 9. bis 13. Mai 2022

Die folgende Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen und dient der Selbstkontrolle.

**Aufgabe H**

Sei  $L$  eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

- $L$  hat eine Teilmenge  $T \subseteq L$ , die entscheidbar ist.
- $L$  hat eine Obermenge  $O \supseteq L$ , die entscheidbar ist.
- Es gibt jeweils nicht nur eine sondern unendlich viele entscheidbare Teilmengen bzw. Obermengen wie in (a) und (b).

**Aufgabe I**

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in  $P$  liegen.
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in  $NP$  liegen.
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in  $PSPACE$  liegen.
- Erläutern Sie, warum  $P \subseteq NP \subseteq PSPACE$  gilt.
- Beschreiben Sie für  $C = NP$  und  $C = PSPACE$ , wann ein Problem „ $C$ -schwer“ bzw. „ $C$ -vollständig“ ist.

**Aufgabe 1**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Falls  $P \neq NP$  gilt, dann auch  $P \cap NP \neq \emptyset$ .
- Es gibt Probleme, die  $NP$ -schwer, aber nicht  $NP$ -vollständig sind.
- Polynomielle Reduzierbarkeit ist nicht transitiv.
- Ist  $L_2 \in P$  und  $L_1 \leq_p L_2$ , dann ist auch  $L_1 \in P$ .

- e) Ist  $L_1$  eine NP-vollständige Sprache und gilt  $L_1 \leq_p L_2$ , dann ist auch  $L_2$  eine NP-vollständige Sprache.
- f) Ist  $L_2$  eine NP-vollständige Sprache und gilt  $L_1 \leq_p L_2$ , dann ist auch  $L_1$  eine NP-vollständige Sprache.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Wortproblem deterministischer endlicher Automaten in LOGSPACE liegt: ist

$$P_{\text{DFA}} := \{ \text{enc}(\mathcal{A})\#\#\text{enc}(w) \mid \mathcal{A} \text{ ist ein DFA, der } w \text{ akzeptiert} \},$$

dann gilt  $P_{\text{DFA}} \in \text{LOGSPACE}$ .

### Aufgabe 3

Wir betrachten das folgende Problem  $K$ : Gegeben sind zwei gerichtete Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  sowie eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ . Gefragt ist, ob es Teilmengen  $V'_1 \subseteq V_1$  und  $V'_2 \subseteq V_2$  gibt, so dass  $|V'_1| = |V'_2| = k$  ist und es eine Bijektion  $f: V'_1 \rightarrow V'_2$  gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

- a) Zeigen Sie  $K \in \text{NP}$ .
- b) Zeigen Sie, dass  $K$  ein NP-schweres Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf  $K$  in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

### Aufgabe 4

Zeigen Sie: ist  $P = \text{NP}$ , dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit für jede erfüllbare aussagenlogische Formel eine erfüllende Belegung findet.