1 Berechenbarkeit

1.1 Turingmaschine für Palindrome

Geben Sie eine 1-Band-Turingmaschine $\mathcal{A}$ an, die die Palindromsprache

$$\mathcal{L}_{palin} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$$

akzeptiert.

1.2 Wortfunktion einer Turingmaschine

Ermitteln Sie die von einer 2-Band-Turingmaschine $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, \{q_E\}, 2)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_E\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\not b\}$ und

$$\begin{aligned}\Delta = \{&(q_0, (x, \not b), (x, x), (r, r), q_0),\\ &(q_0, (\not b, \not b), (\not b, \not b), (n, l), q_1),\\ &(q_1, (\not b, x), (\not b, x), (n, l), q_1),\\ &(q_1, (\not b, \not b), (\not b, \not b), (n, r), q_2),\\ &(q_2, (\not b, x), (x, \not b), (r, r), q_2),\\ &(q_2, (\not b, \not b), (\not b, \not b), (n, n), q_E) \mid x \in \{a, b\}\}\end{aligned}$$

berechnete Funktion $\varphi : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, d.h. gesucht ist eine Funktion, so dass das erste Band von $\mathcal{A}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\forall x \in \Sigma^* : \not b q_o x \not b \vdash^*_{\mathcal{A}} k$ mit k Stoppkonfiguration gdw. $(x) \in \mathsf{dom}(\varphi)$ (Definitionsbereich von φ).
2. Im Fall $x \in \mathsf{dom}(\varphi)$ muss die Beschriftung des (ersten) Bandes in der Stoppkonfiguration k rechts vom Schreib-Lesekopf bis zum ersten Symbol, dass nicht in Σ ist, der Wert $y = \varphi(x)$ der Funktion sein, d.h. k muss die Form $uqyv$ haben mit
   - $v \in (\Gamma \setminus \Sigma) \cdot \Gamma^* \cup \{\epsilon\}$
   - $y = \varphi(x)$

1.3 Konstruktion der 1-Band-Turingmaschine

Konstruieren Sie für die in Aufgabe 1.2 gegebene 2-Band-Turingmaschine $\mathcal{A}$, eine 1-Band-Turingmaschine die dieselbe Funktion berechnet, d.h. gesucht ist eine 1-Band-Turingmaschine $\mathcal{A}'$ die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\forall x \in \Sigma^* : \not b q_o x \not b \vdash^*_{\mathcal{A}'} k$ mit k Stoppkonfiguration gdw. $(x) \in \mathsf{dom}(\varphi)$ (Definitionsbereich von φ).
2. Im Fall $x \in \mathsf{dom}(\varphi)$ muss die Beschriftung des Bandes in der Stoppkonfiguration k rechts vom Schreib-Lesekopf bis zum ersten Symbol, dass nicht in Σ ist, der Wert $y = \varphi(x)$ der Funktion sein, d.h. k muss die Form $uqyv$ haben mit
   - $v \in (\Gamma \setminus \Sigma) \cdot \Gamma^* \cup \{\epsilon\}$
   - $y = \varphi(x)$

1.4 Eigenschaften entscheidbarer Sprachen

Gelten folgende Aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Entscheidbare Mengen sind hinsichtlich Differenzbildung abgeschlossen.

b) Entscheidbare Mengen sind bzgl. des Operators MIN abgeschlossen, d.h. für eine entscheidbare Sprache L ist $\mathrm{MIN}(L)$ mit

$$\mathrm{MIN}(L) = \{x \in L \mid \text{kein echtes Präfix von x ist in L}\}$$

entscheidbar.

c) Ist eine Sprache entscheidbar, so können ihre Elemente in quasilexikographischer Ordnung ohne Wiederholung aufgezählt werden.[1]

[1] Die quasilexikographische Ordnung von Σ^* über das Alphabet Σ ordnet erst die Wörter nach Ihrer Länge, d.h. das leere Wort kommt als Erstes und dann innerhalb der festen Länge n jeweils lexikographisch über Σ^n.