

# THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

## 14. Vorlesung: Modelltheorie und logisches Schließen

Sebastian Rudolph

Folien: © Markus Krötzsch, <https://iccl.inf.tu-dresden.de/web/TheoLog2017>, CC BY 3.0 DE

TU Dresden, 30. Mai 2022

## Rückblick: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W (kennen und sagen die Wahrheit) und Typ L (kennen die Wahrheit und sagen deren Negation).

Smullyan<sup>1</sup> fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

Was können wir jeweils über die Bewohner und ihre Gewohnheiten schließen?

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Prädikatenlogik: Syntax

Wir betrachten unendliche, disjunkte Mengen von Variablen **V**, Konstanten **C** und Prädikatensymbolen **P**.

Ein prädikatenlogisches **Atom** ist ein Ausdruck  $p(t_1, \dots, t_n)$  für ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol  $p \in \mathbf{P}$  und Terme  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{V} \cup \mathbf{C}$ .

Die Menge der **prädikatenlogische Formeln** ist induktiv definiert:

- Jedes Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  ist eine prädikatenlogische Formel
- Wenn  $x \in \mathbf{V}$  eine Variable und  $F$  und  $G$  prädikatenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden prädikatenlogische Formeln:

|                         |                 |                               |
|-------------------------|-----------------|-------------------------------|
| $\neg F$                | Negation        | „nicht $F$ “                  |
| $(F \wedge G)$          | Konjunktion     | „ $F$ und $G$ “               |
| $(F \vee G)$            | Disjunktion     | „ $F$ oder $G$ “              |
| $(F \rightarrow G)$     | Implikation     | „ $F$ impliziert $G$ “        |
| $(F \leftrightarrow G)$ | Äquivalenz      | „ $F$ ist äquivalent zu $G$ “ |
| $\exists x.F$           | Existenzquantor | „für ein $x$ gilt $F$ “       |
| $\forall x.F$           | Allquantor      | „für alle $x$ gilt $F$ “      |

# Semantik der Prädikatenlogik

# Interpretationen und Zuweisungen

Die Wertzuweisungen der Aussagenlogik werden also durch Interpretationen und Zuweisungen für Variablen ersetzt.

Eine Interpretation  $\mathcal{I}$  ist ein Paar  $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$  bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge  $\Delta^{\mathcal{I}}$  (der Domäne) und einer Interpretationsfunktion  $\cdot^{\mathcal{I}}$ , welche:

- jede Konstante  $a \in \mathbf{C}$  auf ein Element  $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  und
- jedes  $n$ -stellige Prädikatensymbol  $p \in \mathbf{P}$  auf eine Relation  $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$

abbildet.

Eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  für eine Interpretation  $\mathcal{I}$  ist eine Funktion  $\mathcal{Z} : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ , die Variablen auf Elemente der Domäne abbildet. Für  $x \in \mathbf{V}$  und  $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$  schreiben wir  $\mathcal{Z}[x \mapsto \delta]$  für die Zuweisung, die  $x$  auf  $\delta$  und alle anderen Variablen  $y \neq x$  auf  $\mathcal{Z}(y)$  abbildet.

# Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $\mathcal{Z}$  eine Zuweisung für  $\mathcal{I}$ .

- Für eine Konstante  $c$  definieren wir  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$ .
- Für eine Variable  $x$  definieren wir  $x^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$ .

Für ein Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  setzen wir sodann:

- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$  und
- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$ .

# Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $\mathcal{Z}$  eine Zuweisung für  $\mathcal{I}$ .

- Für eine Konstante  $c$  definieren wir  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$ .
- Für eine Variable  $x$  definieren wir  $x^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$ .

Für ein Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  setzen wir sodann:

- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$  und
- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$ .

**Achtung:** Wir verwenden Interpretationen und Zuweisungen auf zwei Ebenen, die man nicht verwechseln sollte:

- (1) um Terme  $t$  auf Elemente  $t^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  abzubilden;
- (2) um Atome  $A$  auf Wahrheitswerte  $A^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \{0, 1\}$  abzubilden.

# Formeln interpretieren

Eine Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  für  $\mathcal{I}$  erfüllen eine Formel  $F$ , in Symbolen  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ , wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

| Formel $F$                  | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ wenn:   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models F$ wenn:   |
|-----------------------------|--|--|
| $F$ Atom                    | $F^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$   | $F^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$   |
| $\neg G$                    | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G$   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$   |
| $(G_1 \wedge G_2)$          | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$  | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$   |
| $(G_1 \vee G_2)$            | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$  |
| $(G_1 \rightarrow G_2)$     | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$  |
| $(G_1 \leftrightarrow G_2)$ | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$<br>oder<br>$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$ | $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$<br>oder<br>$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$ |
| $\forall x. G$              | $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$<br>für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$<br>für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$   |
| $\exists x. G$              | $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$<br>für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$   | $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$<br>für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$   |

Gilt  $\mathcal{I} \models F$  für einen Satz  $F$ , sagen wir:  $\mathcal{I}$  ist ein **Modell** für  $F$ .

## Beispiel

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$F = \text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x. (\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y. (\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

Wir betrachten eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\text{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der natürlichen Zahlen
- $\text{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e \rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Dann gilt  $\mathcal{I} \models F$  (unter jeder beliebigen Zuweisung) –  $\mathcal{I}$  ist ein Modell von  $F$ .

**Notation:** Bei der Interpretation von Sätzen (Formeln ohne freie Variablen) spielen Zuweisungen keine Rolle. Wir schreiben sie in diesem Fall nicht.

# Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen.
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten.
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen.

Eine Menge von Sätzen wird oft **Theorie** genannt.

# Logik auf Sätzen

Wie im vorigen Beispiel interessieren uns oft nur Sätze:

- In den meisten Anwendungen arbeitet man nur mit Sätzen.
- Dann genügt es, Interpretationen zu betrachten.
- Zuweisungen sind in diesem Fall ein technisches Hilfsmittel zur Definition der Bedeutung von Sätzen.

Eine Menge von Sätzen wird oft **Theorie** genannt.

**Beispiel:** Der Begriff stammt aus der Mathematik. Die Theorie der partiellen Ordnungen kann man z.B. wie folgt definieren:

$$\forall x.(x \leq x)$$

Reflexivität

$$\forall x, y, z.((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z)$$

Transitivität

$$\forall x, y.((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x \approx y)$$

Antisymmetrie

Dies definiert die Eigenschaften eines binären Prädikates  $\leq$  (hier infix geschrieben). Dabei verwenden wir zudem ein Gleichheitsprädikat  $\approx$  (dazu später mehr).

# Semantische Grundbegriffe

# Modelltheorie

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

|                              |  |
|------------------------------|--|
| Formeln                      | abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke   |
| Interpretationen             | Menge semantischer Strukturen  |
| Erfüllungsrelation $\models$ | Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln? |

# Modelltheorie

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

| Aussagenl.                   |  |                                     |
|------------------------------|--|-------------------------------------|
| Formeln                      | abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke   | Aussagenlogische Formeln            |
| Interpretationen             | Menge semantischer Strukturen  | Wertzuweisungen                     |
| Erfüllungsrelation $\models$ | Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln? | Aussagenlogische Erfüllungsrelation |

# Modelltheorie

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

|                              |  | Aussagenl.                          | Prädikatenl.                          |
|------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|
| Formeln                      | abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke   | Aussagenlogische Formeln            | Prädikatenlogische Sätze              |
| Interpretationen             | Menge semantischer Strukturen  | Wertzuweisungen                     | Prädikatenlogische Interpretationen   |
| Erfüllungsrelation $\models$ | Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln? | Aussagenlogische Erfüllungsrelation | Prädikatenlogische Erfüllungsrelation |

# Modelltheorie

## Wie definiert man logische Semantik „modelltheoretisch“?

|                              |  | Aussagenl.                          | Prädikatenl.                          | Prädikatenl. (offen)                                |
|------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|---|
| Formeln                      | abzählbare Menge syntaktischer Ausdrücke   | Aussagenlogische Formeln            | Prädikatenlogische Sätze              | Prädikatenlogische Formeln (offen oder geschlossen) |
| Interpretationen             | Menge semantischer Strukturen  | Wertzuweisungen                     | Prädikatenlogische Interpretationen   | Prädikatenlogische Interpretationen + Zuweisungen   |
| Erfüllungsrelation $\models$ | Beziehung zwischen Interpretationen & Formeln: Welche Interpretationen sind Modelle welcher Formeln? | Aussagenlogische Erfüllungsrelation | Prädikatenlogische Erfüllungsrelation | Prädikatenlogische Erfüllungsrelation               |

# Modelltheorie: Intuition

Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

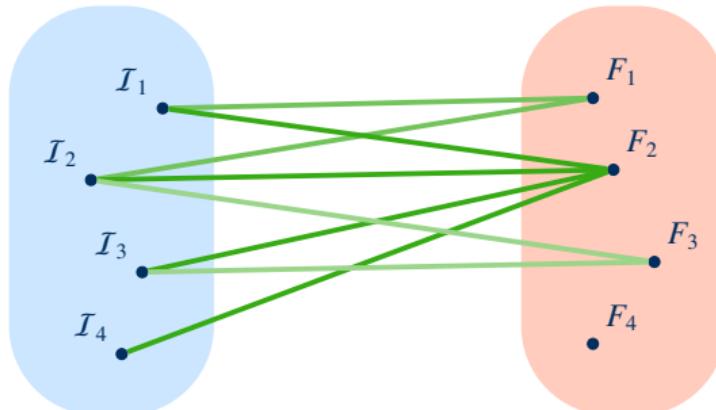
- **Formeln:** Behauptungen, die wahr oder falsch sein können.
- **Interpretationen:** Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht.
- **Modelle:** Interpretationen, die eine bestimmte Formel oder Theorie erfüllen.

# Modelltheorie: Intuition

Die Modelltheorie einer Logik legt (ziemlich abstrakt) fest, worüber die Logik etwas aussagt:

- **Formeln:** Behauptungen, die wahr oder falsch sein können.
- **Interpretationen:** Mögliche Welten, in denen manche Behauptungen gelten und andere nicht.
- **Modelle:** Interpretationen, die eine bestimmte Formel oder Theorie erfüllen.

Interpretationen  $\models$  Formeln



# Tautologien und Widersprüche

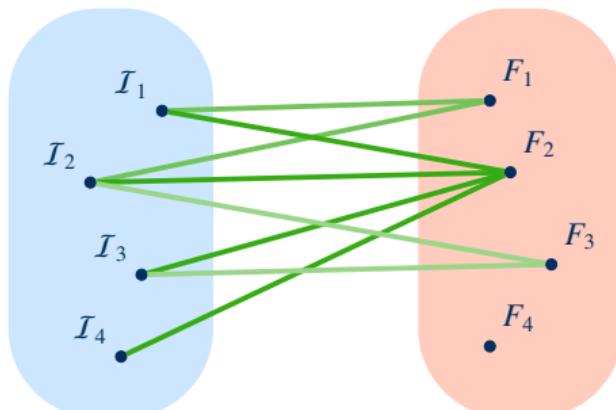
Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).

# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

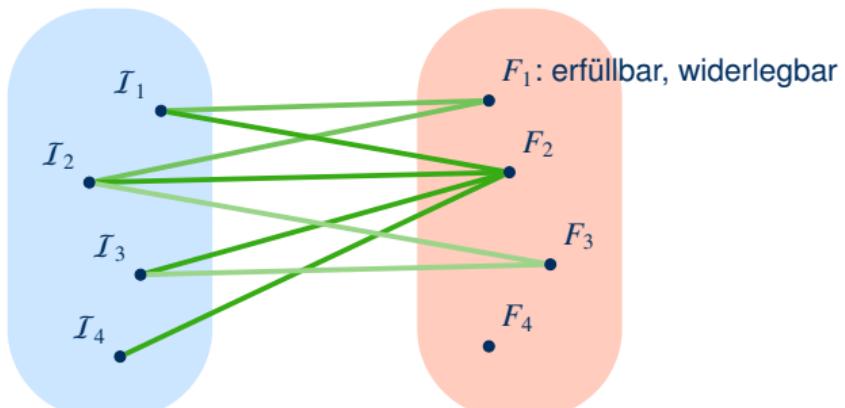
- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

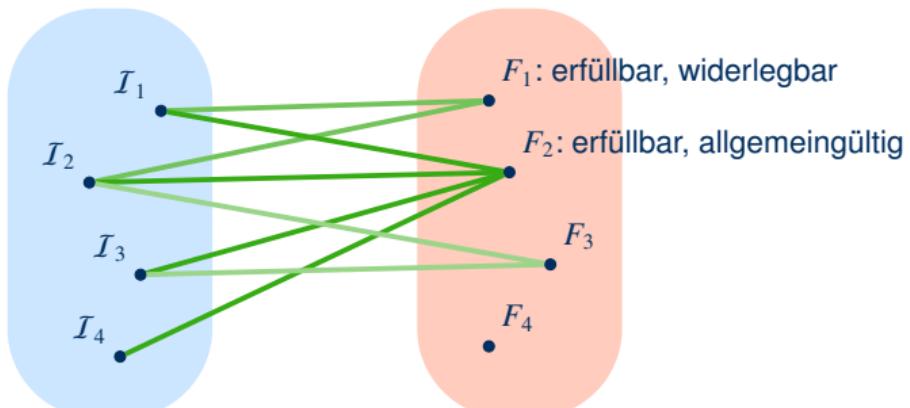
- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

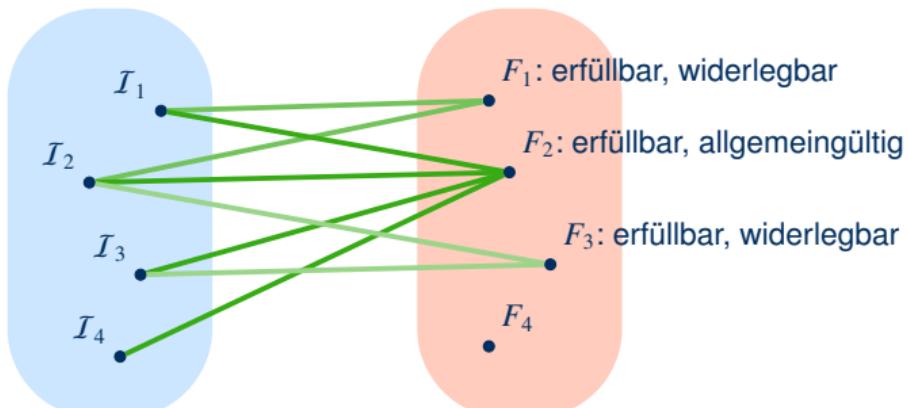
- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

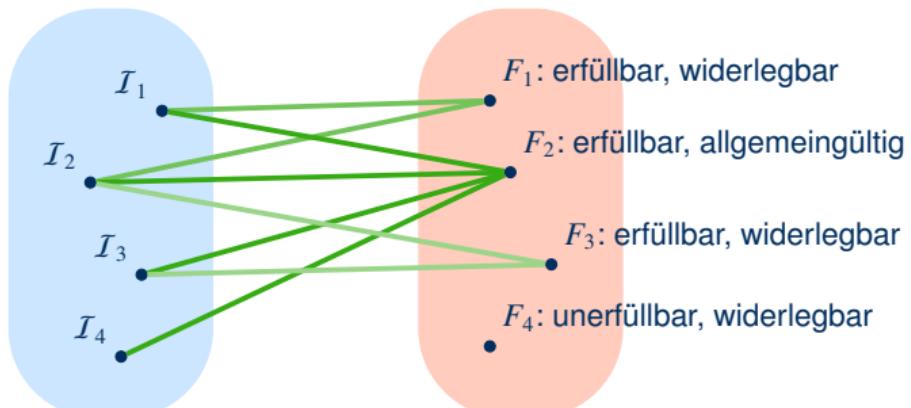
- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).



# Tautologien und Widersprüche

Man unterscheidet Typen von Formeln nach ihren Modellen:

- **allgemeingültig (tautologisch):** Eine Formel, die in allen Interpretationen wahr ist (alle Interpretationen als Modelle hat).
- **widersprüchlich (unerfüllbar):** Eine Formel, die in keiner Interpretation wahr ist (kein Modell hat).
- **erfüllbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation wahr ist (ein Modell hat).
- **widerlegbar:** Eine Formel, die in einer Interpretation falsch ist (deren Negation ein Modell hat).

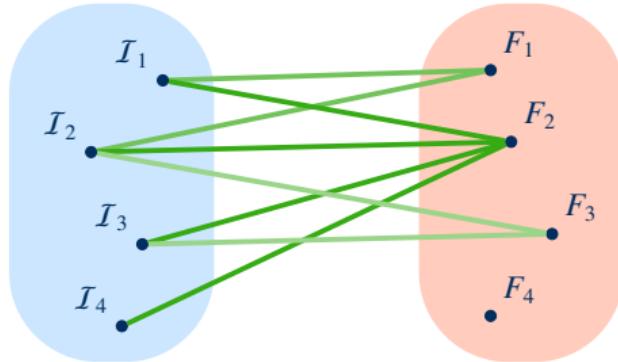


# Logisches Schließen

Aus der Modelltheorie ergibt sich, was **logisches Schließen** genau bedeutet und welche Schlüsse man ziehen darf:

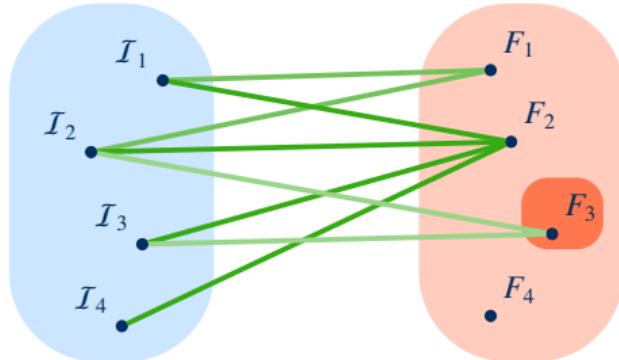
- Wenn  $\mathcal{I} \models F$ , dann nennt man  $\mathcal{I}$  ein **Modell für** die Formel  $F$  und man sagt  $\mathcal{I}$  **erfüllt**  $F$ .
- $\mathcal{I}$  ist ein **Modell für eine Formelmenge**  $\mathcal{T}$ , in Symbolen  $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$ , wenn  $\mathcal{I} \models F$  für jede Formel  $F \in \mathcal{T}$ .
- Eine Formel  $F$  ist eine **logische Konsequenz** aus einer Formel(menge)  $G$ , in Symbolen  $\mathcal{G} \models F$ , wenn jedes Modell von  $G$  auch ein Modell von  $F$  ist, d.h.  $\mathcal{I} \models G$  impliziert  $\mathcal{I} \models F$ .  
**Sonderfall:** Ist  $F$  eine Tautologie, dann schreiben wir  $\models F$ .
- Zwei Formel(menge)n  $F$  und  $G$  sind **semantisch äquivalent**, in Symbolen  $F \equiv G$ , wenn sie die gleichen Modelle haben, d.h. wenn für alle Interpretationen  $\mathcal{I}$  gilt:  $\mathcal{I} \models F$  gdw.  $\mathcal{I} \models G$ .

# Beispiel: Logisches Schließen



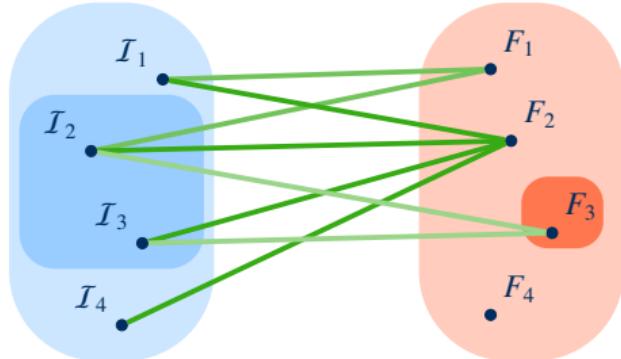
Was folgt aus  $F_3$ ?

# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

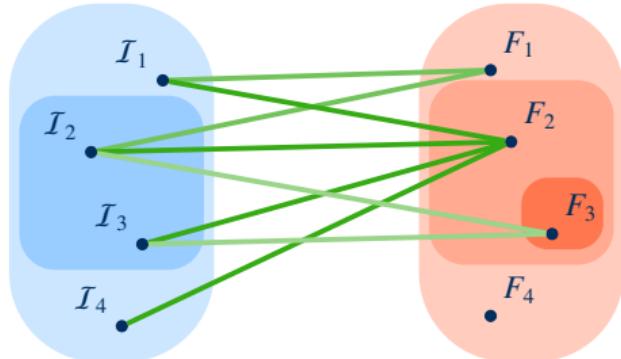
# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

- Die Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$ .

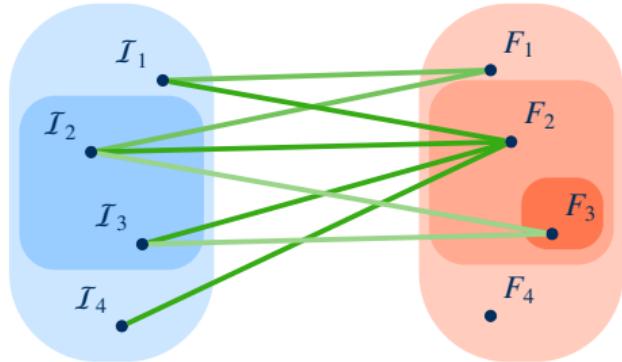
# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

- Die Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$ .
- $I_2$  und  $I_3$  sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$ .

# Beispiel: Logisches Schließen

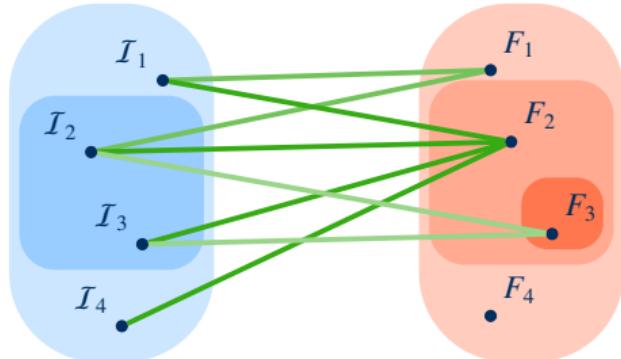


Was folgt aus  $F_3$ ?

- Die Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$ .
- $I_2$  und  $I_3$  sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$ .

Anders gesagt: „Immer wenn  $F_3$  wahr ist, dann ist auch  $F_2$  wahr.“

# Beispiel: Logisches Schließen



Was folgt aus  $F_3$ ?

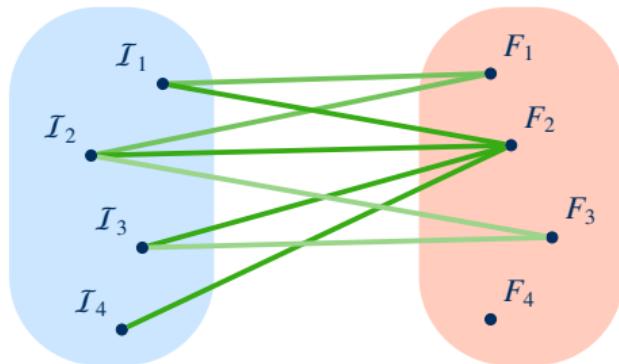
- Die Modelle von  $F_3$  sind  $I_2$  und  $I_3$ .
- $I_2$  und  $I_3$  sind wiederum gemeinsame Modelle von zwei Formeln:  $F_3$  und  $F_2$ .

Anders gesagt: „Immer wenn  $F_3$  wahr ist, dann ist auch  $F_2$  wahr.“

Es gilt also:  $F_3 \models F_2$ .

# Quiz: Logisches Schließen

Es gilt  $F \models G$  gdw. jedes Modell für  $F$  auch ein Modell für  $G$  ist.



**Quiz:** Welche der folgenden Schlussfolgerungen gelten? ...

# Eigenschaften der semantischen Äquivalenz

Die aus der Aussagenlogik bekannten Eigenschaften von  $\equiv$  gelten auch allgemein:

**Satz:**  $\equiv$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.

**Satz:**

- Alle Tautologien sind semantisch äquivalent.
- Alle unerfüllbaren Formeln sind semantisch äquivalent.

**Satz:** Semantische Äquivalenz entspricht wechselseitiger logischer Konsequenz:

$$F \equiv G \quad \text{genau dann wenn} \quad F \models G \text{ und } G \models F$$

Die Behauptungen folgen jeweils direkt aus den Definitionen.

# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

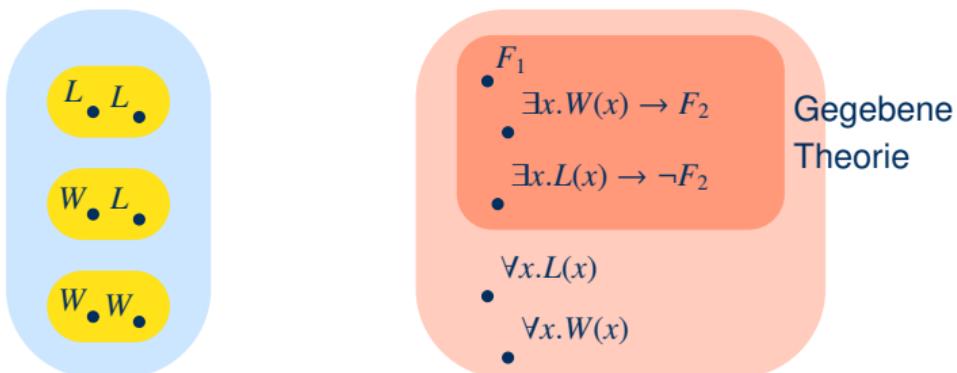
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

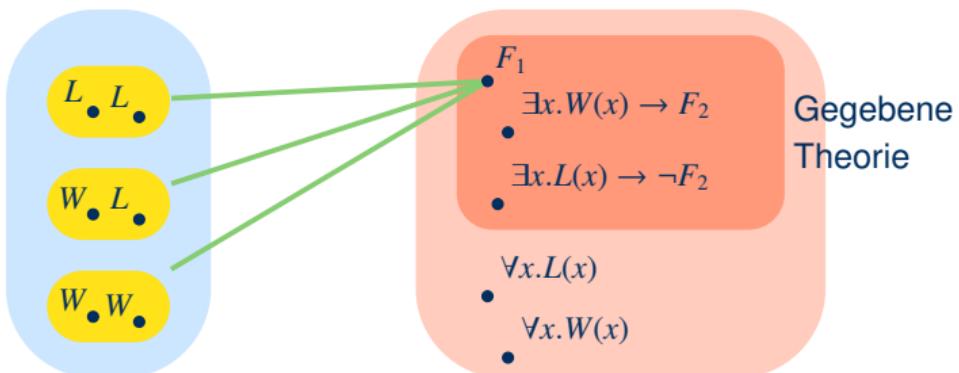
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

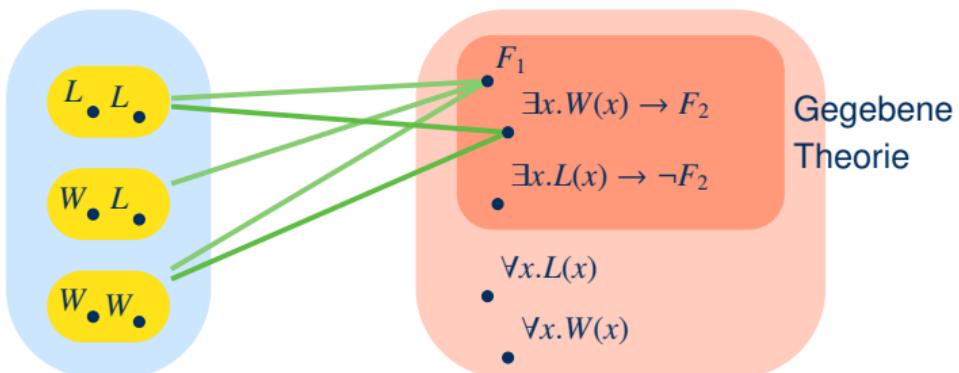
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

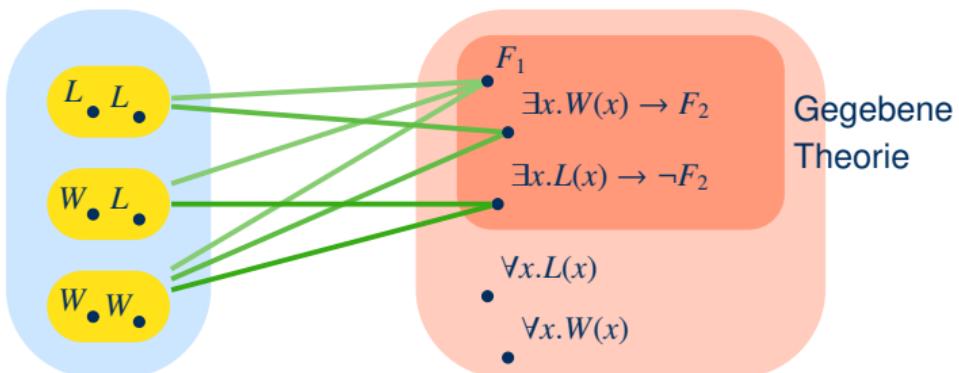
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

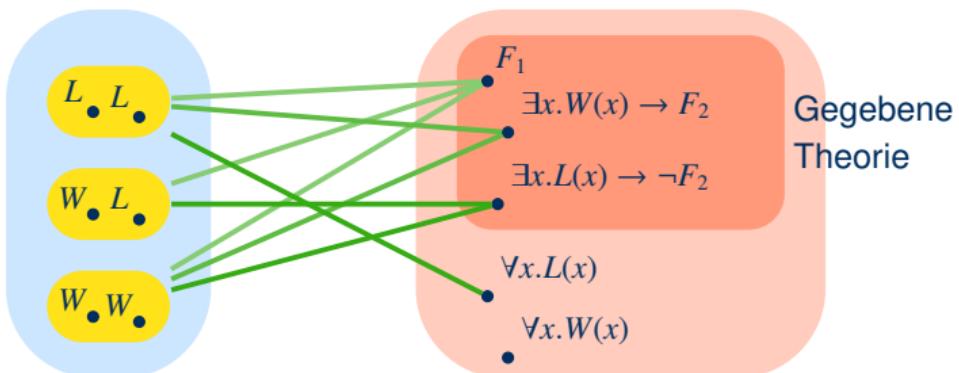
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

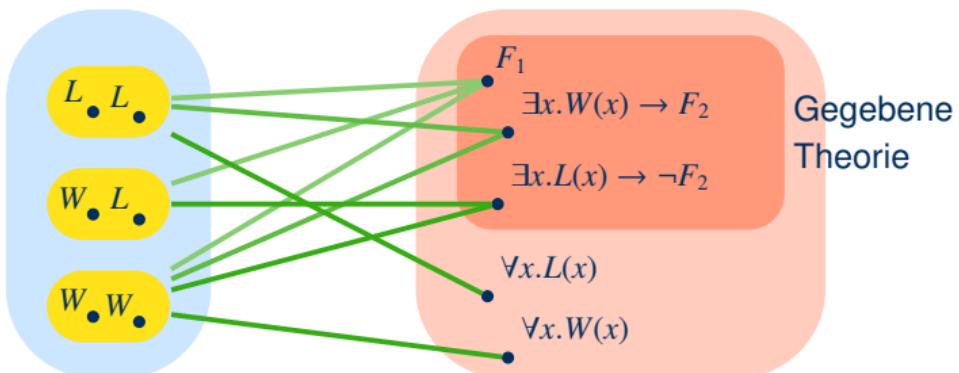
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



# Inseln mit Lügnern und Wahrheitssagern

Rückblick Logelei: „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“

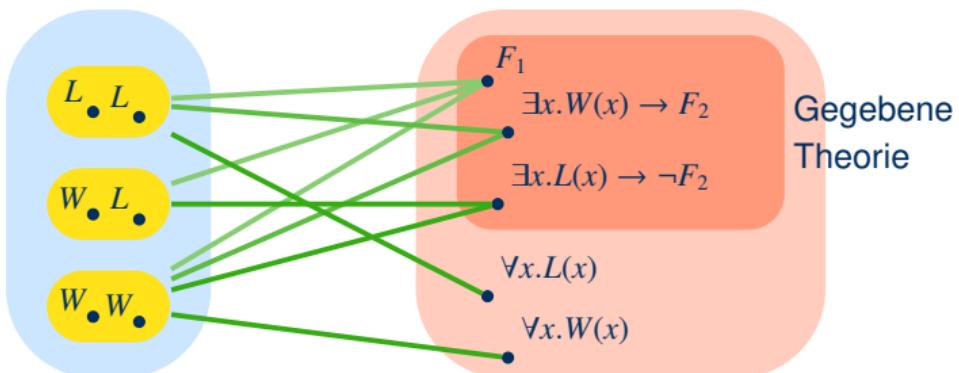
- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“

$$F_1 = \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$$

- „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

$$F_2 = \forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)$$

Wir betrachten einige „repräsentative“ Modelle von  $F_1$ , eine Formalisierung der gegebenen Information und weitere Formeln:



Aus der Theorie folgt  $\forall x.W(x)$ : „Alle Inselbewohner sind von Typ W.“

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für eine gegebene Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für eine gegebene Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

In der Aussagenlogik ist beides relativ einfach lösbar:

- (1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (in linearer Zeit).
- (2) Überprüfe Unerfüllbarkeit von  $F \wedge \neg G$  (coNP-vollständig).

# Das Problem des logischen Schließens

Zwei praktisch wichtige Fragen:

(1) **Model Checking:**

Für eine gegebene Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Formel  $F$ , gilt  $\mathcal{I} \models F$ ?

(2) **Logische Folgerung (Entailment):**

Für gegebene Formel(menge)n  $F$  und  $G$ , gilt  $F \models G$ ?

In der Aussagenlogik ist beides relativ einfach lösbar:

- (1) Berechne den Wahrheitswert unter einer Belegung (in linearer Zeit).
- (2) Überprüfe Unerfüllbarkeit von  $F \wedge \neg G$  (coNP-vollständig).

In der Prädikatenlogik ist das nicht so einfach:

Siehe kommende Vorlesungen.

# Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von  $\models$  folgt **Monotonie**:

- Mehr Sätze  $\Leftrightarrow$  weniger Modelle:
- Je **mehr** Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind,  
desto **weniger** Modelle hat die gesamte Theorie,  
desto **mehr** Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „**Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen.**“

# Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von  $\models$  folgt **Monotonie**:

- Mehr Sätze  $\Leftrightarrow$  weniger Modelle:
- Je **mehr** Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind,  
desto **weniger** Modelle hat die gesamte Theorie,  
desto **mehr** Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „**Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen.**“

Formal heißt Monotonie:

$$\text{Aus } \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \text{ folgt stets } \{F \mid \mathcal{T}_1 \models F\} \subseteq \{F \mid \mathcal{T}_2 \models F\}.$$

# Monotonie und Tautologie

Aus der Definition von  $\models$  folgt **Monotonie**:

- Mehr Sätze  $\Leftrightarrow$  weniger Modelle:
- Je **mehr** Sätze in einer logischen Theorie gegeben sind, desto **weniger** Modelle hat die gesamte Theorie, desto **mehr** Schlussfolgerungen kann man aus ihr ziehen.

Das heißt: „**Mehr Annahmen führen zu mehr Schlussfolgerungen.**“

Formal heißt Monotonie:

$$\text{Aus } \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \text{ folgt stets } \{F \mid \mathcal{T}_1 \models F\} \subseteq \{F \mid \mathcal{T}_2 \models F\}.$$

Die Extremfälle dieses Prinzips sind:

- **Tautologien:** sind in jeder Interpretation wahr und daher logische Konsequenz jeder Theorie.
- **Unerfüllbare Formeln:** sind in keinem Modell wahr und haben daher alle anderen Sätze als Konsequenz.

# Modelltheorie ist allgemein gültig

Was wir bisher über Modelltheorie gesagt haben, gilt für jede Logik, deren Semantik auf einer Modell-Beziehung  $\models$  von Interpretationen zu einzelnen Formeln basiert:

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik (nur Sätze und Interpretationen)
- Prädikatenlogik (beliebige Formeln und Interpretationen+Zuweisungen)
- Logik zweiter Stufe
- Modal-, Temporal- und Beschreibungslogiken
- Mehrwertige Logiken
- Nichtklassische Logiken
- ...

Andere Eigenschaften der Prädikatenlogik sind nicht ganz so allgemein.

# Prädikatenlogik und Aussagenlogik

# Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen  $w$  durch Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit Zuweisungen  $\mathcal{Z}$ .
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich.

~ Alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog.

# Verhältnis zur Aussagenlogik

Die Semantik der Operatoren  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  ist in Prädikatenlogik und Aussagenlogik gleich definiert:

- Wir ersetzen Wertzuweisungen  $w$  durch Interpretationen  $\mathcal{I}$  mit Zuweisungen  $\mathcal{Z}$ .
- Ansonsten ist die Definition der Semantik genau gleich.

~ Alle aussagenlogischen Gesetze gelten analog.

**Beispiel:** Die De Morganschen Regeln gelten auch in der Prädikatenlogik, z.B.  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg(F \wedge G)$  genau dann wenn  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (\neg F \vee \neg G)$ , das heißt  $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ .

Allgemein gelten alle bekannten aussagenlogischen Äquivalenzen.

„ $\models$ “ = „ $\rightarrow$ “ und „ $\equiv$ “ = „ $\leftrightarrow$ “

Auch die folgenden Sätze gelten analog zur Aussagenlogik:

(Siehe Formale Systeme, Vorlesung 22)

**Satz (Deduktionstheorem):** Für jede Formelmenge  $\mathcal{F}$  und Formeln  $G$  und  $H$  gilt  
 $\mathcal{F} \models G \rightarrow H$  genau dann wenn  $\mathcal{F} \cup \{G\} \models H$ .

**Korollar:**  $F \wedge G \models H$  genau dann wenn  $F \models G \rightarrow H$ .

**Korollar:**  $F \equiv G$  genau dann wenn  $\models F \leftrightarrow G$ .

Dennoch sind  $\models$  und  $\equiv$  nicht dasselbe wie  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$ :

- Die Relationen  $\models$  und  $\equiv$  können sich auch auf (möglicherweise unendliche) Mengen von Formeln beziehen.
- Die Symbole  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  sind syntaktische Operatoren und können (eventuell geschachtelt) in Formeln auftreten.

# Das Ersetzungstheorem

Auch das folgende intuitiv einleuchtende Ergebnis kann von der Aussagenlogik auf die Prädikatenlogik übertragen werden:

**Satz (Ersetzungstheorem):** Sei  $F$  eine Formel mit einer Teilformel  $G$ . Wenn  $G \equiv G'$  und wenn  $F'$  aus  $F$  gebildet werden kann, indem man ein beliebiges Vorkommen von  $G$  in  $F$  durch  $G'$  ersetzt, dann gilt auch  $F \equiv F'$ .

Der detaillierte Beweis muss allerdings alle möglichen Formen von Formeln betrachten (Induktion über Formelstruktur). Im Vergleich zur Aussagenlogik müsste man also noch zeigen, dass die Ersetzung von äquivalenten Formeln in  $\exists x.G$  und  $\forall x.G$  zulässig ist.

# Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (1)

$$F \wedge G \equiv G \wedge F$$

Kommutativität

$$F \vee G \equiv G \vee F$$

$$(F \wedge G) \wedge H \equiv F \wedge (G \wedge H)$$

Assoziativität

$$(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$$

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

Distributivität

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$F \wedge F \equiv F$$

Idempotenz

$$F \vee F \equiv F$$

$$F \wedge (F \vee G) \equiv F$$

Absorption

$$F \vee (F \wedge G) \equiv F$$

# Rückblick: Aussagenlogische Äquivalenzen (2)

$$\neg\neg F \equiv F$$

doppelte Negation

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

De Morgansche Gesetze

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$$

$$F \wedge \top \equiv F$$

Gesetze mit  $\top$

$$F \vee \top \equiv \top$$

$$F \wedge \perp \equiv \perp$$

Gesetze mit  $\perp$

$$F \vee \perp \equiv F$$

$$\neg \top \equiv \perp$$

$$\neg \perp \equiv \top$$

Dabei stellen wir wie zuvor  $\top$  durch eine beliebige Tautologie (z.B.  $p \vee \neg p$ ) und  $\perp$  durch einen beliebigen Widerspruch (z.B.  $p \wedge \neg p$ ) dar.

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^I \subseteq (\Delta^I)^0$ .

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^I \subseteq (\Delta^I)^0$ .
- $(\Delta^I)^0$  enthält alle „nullstelligen Tupel“.  
→ Es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel  $\langle \rangle$ .

# Aussagenlogik in Prädikatenlogik darstellen

Aussagenlogische Atome  $p$  kann man durch prädikatenlogische Atome  $p()$  auffassen, wobei  $p$  ein nullstelliges Prädikatensymbol ist.

Sei  $p \in \mathbf{P}$  ein nullstelliges Prädikat.

Welche Interpretationen  $p^I$  sind möglich?

- Laut Definition gilt  $p^I \subseteq (\Delta^I)^0$ .
- $(\Delta^I)^0$  enthält alle „nullstelligen Tupel“.  
→ Es gibt aber nur ein einziges nullstelliges Tupel  $\langle \rangle$ .
- Also ist  $p^I \subseteq \{\langle \rangle\}$ :
  - $p^I = \{\langle \rangle\}$  bedeutet  $I \models p()$  („Aussage wahr“);
  - $p^I = \{\}$  bedeutet  $I \not\models p()$  („Aussage falsch“).

Deshalb kann man nullstellige Prädikate wie aussagenlogische Atome verwenden.

In diesem Sinne ist die Aussagenlogik ein Teil der Prädikatenlogik.

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“  
Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Auflösung: Logelei

Im Inselreich der Menschen von Typ W und Typ L fragte Smullyan<sup>1</sup> die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten:

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“  
Die Aussage stimmt und alle sind vom Typ W.
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“  
Alle sind vom Typ L und keiner raucht.
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“  
Alle sagen die Wahrheit; es rauchen alle oder keiner.
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“  
Alle lügen; es rauchen alle oder keiner.

---

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

# Zusammenfassung und Ausblick

Modelltheorie definiert logische Semantik aus der Beziehung von Formeln (Behauptungen) und Interpretationen (möglichen Welten).

Logisches Schließen ist die Berechnung (Überprüfung) einzelner Beziehungen der Form  $\mathcal{I} \models F$  (Model checking) bzw.  $F \models G$  (Schlussfolgerung).

Prädikatenlogik verallgemeinert Aussagenlogik und viele der dort gültigen Gesetze.

Was erwartet uns als nächstes?

- Logisches Schließen: (Un)Entscheidbarkeit und Komplexität
- Resolution für Prädikatenlogik