Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
2. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 27. Oktober bis 2. November 2025 — Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S3) Wiederholen Sie die Begriffe: Alphabet, Wort, formale Sprache, Grammatik, Typ einer Grammatik, Typ einer Sprache, deterministischer endlicher Automat, nichtdeterministischer endlicher Automat und reguläre Sprache.

S4) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Identität

$$({L_1}^* \circ {L_2}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^* \,.$$

Aufgabe 1

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ & S \longrightarrow AB, S \longrightarrow C, S \longrightarrow \varepsilon, A \longrightarrow aA, A \longrightarrow \varepsilon, B \longrightarrow bBc, B \longrightarrow Bc, B \longrightarrow \varepsilon, \\ & C \longrightarrow aCc, C \longrightarrow Cc, C \longrightarrow D, D \longrightarrow aD, D \longrightarrow \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Geben Sie eine zu G äquivalente ε-freie Grammatik G' an.

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils einen DFA $\mathcal{M}_i$ an, der die Sprache L_i akzeptiert:

a) $L_1 = \{a^n bac^m \mid m, n > 0,\ n \text{ ist gerade und } m \text{ ist ungerade}\}$

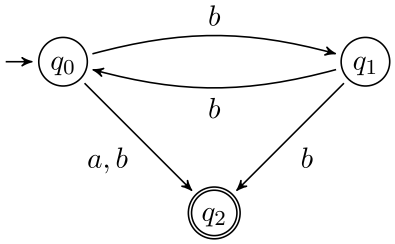
b) $L_2 = \big\{w \in \{0,1\}^* \mid \exists i \in \{0,1\},\ \text{sodass } i \text{ Suffix von } w \text{ ist und } |w|_i \bmod 2 = 1 \text{ gilt.}\big\}$

Hierbei bezeichnet $|w|_i$ mit $i \in \{0, 1\}$ die Anzahl an i's in w.

Aufgabe 3

a) Erklären Sie, wann zwei NFAs $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ äquivalent sind.

b) Geben Sie einen DFA $\mathcal{M}'$ an, der zum NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ äquivalent ist; für $\mathcal{M}$ ist die Übergangsfunktion δ grafisch angegeben:



Hinweis: Die nachfolgenden zwei Aufgaben sind zusätzliche *Knobelaufgaben* (mit * bzw. ** markiert), die dazu gedacht sind, sich intensiver mit dem Material der Vorlesung auseinanderzusetzen. Bevor Sie sich mit diesen Zusatzaufgaben auseinandersetzen, bearbeiten Sie bitte zunächst die übrigen Aufgaben.

c*) Seien $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, Q_0^1, F_1)$ und $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, Q_0^2, F_2)$ zwei NFAs über demselben Alphabet Σ.

Wir nennen eine binäre Relation $S \subseteq Q_1 \times Q_2$ *Simulation zwischen* $\mathcal{M}_1$ *und* $\mathcal{M}_2$, wenn für alle $q_0 \in Q_0^1$ ein $q_0' \in Q_0^2$ existiert, sodass $(q_0, q_0') \in S$ *und* für alle Paare $(q_1, q_2) \in S$ und Symbole $a \in \Sigma$ gilt, dass

(i) wenn $q_1' \in \delta_1(q_1, a)$, dann existiert ein $q_2' \in \delta(q_2, a)$ und $(q_1', q_2') \in S$;

(ii) wenn $q_1 \in F_1$, so gilt $q_2 \in F_2$.

$\mathcal{M}_1$ *wird von* $\mathcal{M}_2$ *simuliert*, in Symbolen: $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$, wenn eine Simulation zwischen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ existiert.

Sind $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ deterministisch, so werden in der Definition von Simulation entsprechende Vorkommen von $q_0 \in Q_0^i$ durch $q_0 = q_0^i$ (wobei q_0^i der eindeutige Startzustand von $\mathcal{M}_i$ ist) und $q' \in \delta_i(q, a)$ durch $q' = \delta_i(q, a)$ ersetzt.

Geben Sie eine Simulation zwischen $\mathcal{M}$ und Ihrem konstruierten Automaten $\mathcal{M}'$ aus Aufgabenteil b) an. Finden Sie auch eine Simulation zwischen $\mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}$?

d)** Zeigen oder widerlegen Sie die nachfolgenden Behauptungen für zwei beliebige NFAs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$:

1. Wenn $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$ gilt, so gilt auch $L(\mathcal{M}_1) \subseteq L(\mathcal{M}_2)$.
2. Wenn $L(\mathcal{M}_1) \subseteq L(\mathcal{M}_2)$ gilt, so gilt auch $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung folgende Aussagen.

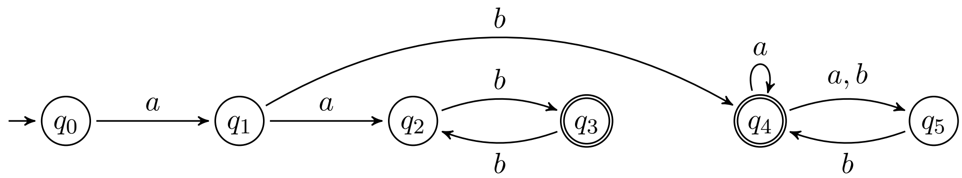
a) Für jede reguläre Sprache L kann eine kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ angegeben werden.

b) Wenn L von einem DFA erkannt werden kann und $L \subseteq L'$ gilt, so kann L' ebenfalls von einem DFA erkannt werden.

c) Wenn L von einem DFA erkannt werden kann und $L' \subseteq L$ gilt, so kann L' ebenfalls von einem DFA erkannt werden.

Aufgabe 5

Gegeben ist der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3, q_4\})$ mit δ:



Geben Sie eine reguläre Grammatik an, die die Sprache $L(\mathcal{M})$ erzeugt.