



Formale Systeme

12. Übungsblatt

Wintersemester 2023/24

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S20) Prüfen Sie mittels Wahrheitstabellen, welche der folgenden Formeln allgemeingültig, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

- a) $(a \leftrightarrow ((a \wedge \neg a) \vee a))$
- b) $((a \rightarrow b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b))$
- c) $((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow a)) \wedge (b \leftrightarrow a)$
- d) $((\neg a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \wedge \neg c$

Aufgabe 1

Inspektor Craig wird zu einem wichtigen Fall nach Transsilvanien gerufen, in dem es darum geht herauszufinden, welcher von zwei Beschuldigten ein Vampir ist. Wie allgemein bekannt ist, besteht die Bevölkerung in Transsilvanien zum Teil aus Menschen und zum anderen Teil aus Vampiren. Die Menschen sagen stets die Wahrheit, die Vampire lügen stets. Außerdem ist ein Teil der Bevölkerung Transsilvaniens verrückt: Alles, was wahr ist, glauben sie, sei falsch, und umgekehrt. Nicht verrückte Transsilvanier hingegen halten genau das für wahr, was wahr ist. Insbesondere sagt ein verrückter Vampir (wie auch ein nicht-verrückter Mensch) stets das Richtige: Eine Aussage, die wahr ist, glaubt er, sei falsch, da er aber stets lügt, gibt er dennoch eine richtige Antwort.

Craig verhört die zwei Beschuldigten Lucy und Minna, von denen bekannt ist, dass eine ein Vampir ist und die andere nicht. Das Verhör geht wie folgt vonstatten:

Craig (zu Lucy): Erzählen Sie mir von Ihnen.

Lucy: Wir sind beide verrückt.

Craig (zu Minna): Ist das richtig?

Minna: Natürlich nicht!

Formalisieren Sie dieses Szenario mithilfe aussagenlogischer Formeln und finden Sie heraus, wer der Vampir ist!

Diese Aufgabe stammt aus: *Raymond Smullyan: The Lady or the Tiger?. Alfred A. Knopf, 1986.*

Aufgabe 2

Zeigen Sie, welche der folgenden Aussagen gültig sind und welche nicht:

- a) $\{(\neg a \vee b), (\neg b \vee c), (b \wedge c)\} \models ((a \leftrightarrow b) \vee c)$
- b) $\{(a \rightarrow b), (c \vee a), (a \rightarrow \neg b), \neg c\} \models a$
- c) $\{(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), (\neg c \wedge b), \neg(\neg a \vee b)\} \models \neg(a \vee b)$

Aufgabe 3

Für eine Formel F ist die Größe $|F|$ definiert durch:

$$\begin{aligned} |p| &:= 1 \\ |\neg G| &:= |G| + 1 \\ |(G_1 \vee G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\ |(G_1 \wedge G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\ |(G_1 \rightarrow G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\ |(G_1 \leftrightarrow G_2)| &:= |G_1| + |G_2| + 1, \end{aligned}$$

wobei G_1 und G_2 Formeln sind und $p \in \mathcal{P}$ ist. Zeigen Sie (bspw. mittels struktureller Induktion) die folgenden Aussagen:

- a) Die Anzahl der Variablen in F ist beschränkt durch $|F|$.
- b) Die Anzahl der Unterformeln in F ist beschränkt durch $|F|$.