

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2026

Probeklausur

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a) Gilt $NL = ExpTime$, dann ist das Halteproblem entscheidbar.
- b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.
- c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.
- d) Die QBF $\exists p. \forall q. \exists r. ((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r))$ ist wahr.
- e) Die Beantwortung von Datenbankabfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

Aufgabe 2

(10 Punkte)

In der Vorlesung wurden das folgende Problem vorgestellt:

Problem: SAT

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform (KNF).

Gefragt: Gibt es eine Belegung der Atome in F , die F wahr macht?

Wir verwenden außerdem das folgende Problem:

Problem: Stabile Menge

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$.

Gefragt: Gibt es eine Menge $M \subseteq V$, die die folgenden Bedingungen erfüllt?

- a) Für alle $m, n \in M$ gilt, dass $(m, n) \notin E$;
 - b) für alle $n \in V \setminus M$ gilt, dass es ein $m \in M$ gibt mit $(m, n) \in E$.
-

Betrachten Sie nun folgenden Versuch, das Problem **SAT** auf das Problem **Stabile Menge** zu reduzieren.

Wir definieren nachfolgend eine Funktion, die aussagenlogische Formeln in KNF auf gerichtete Graphen abbildet. Sei $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$ eine Formel mit m Klauseln und $K_i = L_{i,1} \vee \dots \vee L_{i,j_i}$ für $1 \leq i \leq m$. Wir konstruieren den Graphen $G_F = (V, E)$ wie folgt: $V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_{1,1}, \dots, v_{1,j_1}, v_{2,1}, \dots, v_{m,j_m}\}$, d.h. für jede Klausel in F und für jedes Literal in jeder Klausel K_i bekommt G_F einen Knoten; $E = \{(u_i, u_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{i,j}, u_i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq j_i\} \cup \{(v_{i,j}, v_{x,y}), (v_{x,y}, v_{i,j}) \mid L_{i,j} = \neg L_{x,y}\}$, d.h. (1) für jede Klausel hat ihr Knoten eine Kante zu sich selbst; (2) der Knoten eines Literals hat eine Kante zum Knoten einer Klausel, wann immer das Literal in der Klausel vorkommt; und (3) zwei Literal-Knoten werden in beide Richtungen per Kante miteinander verbunden, wenn ihre Literale zueinander widersprüchlich sind.

- a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ (3)
nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F . (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)

Hat G_F eine stabile Menge? Markieren Sie sie in der Skizze.

- b) Was müsste gezeigt werden, um zu beweisen, dass die angegebene Funktion tatsächlich (3)
eine polynomielle Reduktion von **SAT** auf **Stabile Menge** darstellt? Es genügt, wenn Sie die konkret zu zeigenden Aussagen auflisten, den Beweis selbst müssen Sie nicht durchführen.

- c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt? (1)
- (1) **Stabile Menge** ist in NP.
- (2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.
- d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort. (3)

Aufgabe 3

(8 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Formel (2)

$$F := \neg b \vee \left((\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg d \vee (a \wedge \neg c)) \right)$$

äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

- b) Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass (4)

$$\{ (\neg a \vee b), (\neg a \vee d), (\neg b \vee \neg d \vee c), (\neg d \vee \neg c \vee \neg a) \} \models \neg a$$

gilt.

- c) Begründen Sie, warum die Hyperresolution für Horn-Formeln immer in polynomieller Zeit (2) terminiert.

Aufgabe 4**(8 Punkte)**

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F ?

$$F = \forall x.p(x, x) \wedge \forall x, y.(p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \wedge \forall x, y, z.((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{(m, n) \mid m \leq n\}$;
- b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$;
- c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und
 $p^{\mathcal{I}_3} = \{(m, n) \mid \text{es gibt } p, q, r \in \mathbb{N}, r < 7, \text{ so dass } m = p \cdot 7 + r \text{ und } n = q \cdot 7 + r\}$;
- d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ und
 $p^{\mathcal{I}_4} = \{(x, y) \mid x \text{ und } y \text{ enden mit verschiedenen Symbolen}\}$.

Aufgabe 5**(8 Punkte)**

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P .

$$O(x, y) \leftarrow n(x, y)$$

$$O(x, z) \leftarrow O(x, y) \wedge n(y, z)$$

$$R(x) \leftarrow s(y, x) \wedge O(x, y)$$

$$R(x) \leftarrow s(y, x) \wedge R(y)$$

$$n(a, b) \quad n(b, c) \quad n(c, d) \quad n(d, e)$$

$$s(a, b) \quad s(c, a) \quad s(b, d) \quad s(b, e)$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \dots$.

Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

Aufgabe 6

(12 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G .

(6)

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x, y, z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x, y))$$

$$G = \neg \forall x.(q(x) \vee \exists y, z.p(x, y, z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

- b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

(6)

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Aufgabe 7

(5 Punkte)

Die Wortlogik ist wie folgt definiert. Die Formeln der Logik sind die Ausdrücke der Grammatik:

$$F ::= \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \dots \mid \mathbf{Z} \mid \mathbf{vor}.F \mid \mathbf{Leer} \mid F \wedge F$$

Eine Interpretation der Wortlogik ist ein Wort w über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{z}\}$.

Interpretation $w \in \Sigma^*$ erfüllt Formel F , wenn einer der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von F	Bedingung für $w \models F$
$F = \mathbf{Leer}$	$w = \varepsilon$ (das leere Wort)
$F = \mathbf{A}$	$w = \mathbf{a}v$ für ein $v \in \Sigma^*$
analog für $F \in \{\mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{Z}\}$	
$F = \mathbf{vor}.G$	$w = \sigma v$ für $\sigma \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$, sodass $v \models G$
$F = G_1 \wedge G_2$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$

Beispiel: Es gilt $\mathbf{kunst} \models \mathbf{K}$ und $\mathbf{theoinf} \models \mathbf{vor.H}$.

Die Begriffe *Modell*, *logische Konsequenz* und *unerfüllbar* sind wie üblich definiert.

- Geben Sie ein Modell für die Formel $\mathbf{vor.vor.Leer}$ an.
- Geben Sie eine Formel an, die von $\mathbf{goedel}$ und $\mathbf{hilbert}$ erfüllt wird.
- Geben Sie eine unerfüllbare Formel an.
- Finden Sie eine logische Konsequenz der Formel $\mathbf{vor.M}$.