Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 (Monotonie der klassischen Aussagenlogik)

Seien F und G aussagenlogische Formeln und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ Mengen aussagenlogischer Formeln. Beweisen Sie semantisch die folgende Aussage:

Wenn $\mathcal{F} \models G$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, dann gilt $\mathcal{F}' \models G$.

Aufgabe 4.2 (Wissenswertes über Nessie)

Von Nessie, dem Ungeheuer von Loch Ness, sei Folgendes bekannt:
Ist sie ein Märchenwesen, dann ist sie unsterblich. Ist sie kein Märchenwesen, dann ist sie sterblich und ein Tier. Wenn Nessie unsterblich oder ein Tier ist, dann ist sie ein Drache. Jeder Drache ist natürlich eine Touristenattraktion.

(a) Formulieren Sie diese Aussagen über Nessie mit Hilfe der Aussagenlogik. Verwenden Sie dazu die aussagenlogischen Variablen m (Nessie ist Märchenwesen), s (Nessie ist sterblich), t (Nessie ist ein Tier), d (Nessie ist ein Drache) und a (Nessie ist Touristenattraktion).

(b) Folgt aus diesen Aussagen, dass Nessie ein Märchenwesen ist? Oder kann daraus gefolgert werden, dass sie kein Märchenwesen ist? Beweisen Sie Ihr Urteil.

Aufgabe 4.3 (Logische Äquivalenzen)

Beweisen Sie die folgenden logischen Äquivalenzen (vgl. Satz 3.19):

(a) $(F \lor F) \equiv F$

(b) $\neg(F \land G) \equiv (\neg F \lor \neg G)$

(c) $(F \to G) \equiv (\neg F \lor G)$

(d) $((F \lor G) \lor H) \equiv (F \lor (G \lor H))$ (Assoziativität)

(e) $((F \lor G) \land F) \equiv F$ (Absorption)

(f) $(F \land G) \equiv G$, wenn F allgemeingültig (Tautologie).

(g) $\neg\neg F \equiv (F \land F)$

Aufgabe 4.4 (Das vollständige Junktorensystem $\{\neg, \vee\}$)

Zeigen Sie: Es gibt zu jeder aussagenlogischen Formel (mit was auch immer für ein- und zweistelligen Junktoren aus dem Reservoir der 4 bzw. 16 möglichen Junktoren) eine semantisch äquivalente Formel, welche nur die Junktoren $\neg$ und $\vee$ enthält.

Aufgabe 4.5 (Positionen und Ersetzungen in Formeln)

(a) Bestimmen Sie die Menge der Positionen $\mathcal{P}_F$ für $F = \neg(p \wedge (q \vee \neg p))$.

(b) Bestimmen Sie schrittweise die Teilformel von $G = \neg\neg((p \vee q) \wedge (q \vee \neg p))$ an der Position 1122Λ.

(c) Bestimmen Sie für die Formel $H = \neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(q \vee \neg p))$ die Formel $H\lceil 121\Lambda \mapsto (\neg p \to q)\rceil$.

Gilt $H \equiv H\lceil 121\Lambda \mapsto (\neg p \to q)\rceil$?

Aufgabe 4.6 (Formelersetzungen)

Seien $F, G, H \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ und es existiert eine Position $\pi \in \mathcal{P}_F$ mit $F\lceil\pi\rceil = G$.
Gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Wenn F, G und H erfüllbar sind, dann ist auch $F\lceil\pi \mapsto H\rceil$ erfüllbar.

(b) Seien F eine allgemeingültige, G eine unerfüllbare und H eine erfüllbare aussagenlogische Formel. Dann gilt $F \equiv F\lceil\pi \mapsto ((H \wedge G) \wedge (H \vee G))\rceil$.

(c) Wenn $G \to H$ allgemeingültig ist, dann auch $F \to F\lceil\pi \mapsto H\rceil$.