THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

Repetitorium

Stephan Mennicke

Professur Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 18. Juli 2024

Disclaimer

Bei den nachfolgend besprochenen Lösungsvorschlägen für die Aufgaben zur Selbstkontrolle handelt es sich ausdrücklich nicht um **sogenannte** Musterlösungen.

Die Vorschläge werden im entsprechenden Repetitorium teilweise zur Diskussion gestellt.

Blatt 1

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathrm{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathrm{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathrm{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathrm{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.
- Sei $\mathcal{M}_\emptyset$ eine TM, die immer verwirft.

Aufgabe B

Zeigen Sie: Wenn es möglich ist, für zwei beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren, so ist es auch möglich, für beliebige Turing-Maschinen zu entscheiden, ob sie die leere Sprache akzeptieren.

Lösungsvorschlag

- Sei $\mathcal{K}$ eine TM, so dass für alle TMs $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ gilt: $\mathcal{K}$ akzeptiert die Eingabe $\mathrm{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\,\mathrm{enc}(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_2)$, und verwirft sonst.
- Sei $\mathcal{M}_\emptyset$ eine TM, die immer verwirft.
- Dann ist $\mathcal{K}'$ mit $\mathcal{K}'(\mathrm{enc}(\mathcal{M})) = \mathcal{K}(\mathrm{enc}(\mathcal{M})\#\#\,\mathrm{enc}(\mathcal{M}_\emptyset))$ ein Entscheider für die Leerheit von $\mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \{S \mid S \subseteq \{1\}^*\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \{S \mid S \subseteq \{1\}^*\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.

Blatt 2

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \{S \mid S \subseteq \{1\}^*\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.
- Es gibt aber nur abzählbar unendlich viele entscheidbare Mengen.

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Lösungsvorschlag

- $\mathcal{P}(\{1\}^*) = \{S \mid S \subseteq \{1\}^*\}$ hat überabzählbar viele Elemente, d.h.
- $\{1\}^*$ hat überabzählbar viele Teilmengen.
- Es gibt aber nur abzählbar unendlich viele entscheidbare Mengen.
- Also hat $\{1\}^*$ (überabzählbar viele) unentscheidbare Teilmengen.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes LOOP-Programm terminiert.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jedes LOOP-Programm terminiert.

Lösungsvorschlag

1. Ja, denn jede Schleife in einem LOOP-Programm läuft nur endlich viele Schritte.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.

Lösungsvorschlag

1. Falsch, zum Beispiel kann die Ackermann-Funktion durch ein WHILE-Programm, aber nicht durch ein LOOP-Programm berechnet werden.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

   $$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

   kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

$$\texttt{LOOP}\ x_i\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

   kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.

Lösungsvorschlag

1. Nein, die Semantik der LOOP-Anweisung sieht vor, dass der Wort der Variable x_i nur zu Beginn der Schleife geprüft wird. Eine Veränderung des Wertes von x_i in P hat damit keinen Einfluss auf die Anzahl der Durchläufe der Schleife.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Blatt 2

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Lösungsvorschlag

1. Nein, die Ackermann-Funktion ist zwar total, aber nicht LOOP-berechenbar.

Blatt 3

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\text{mod2}}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\text{mod2}}$ an, die die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Lösungsvorschlag

$\mathcal{A}_{\text{mod2}} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \llcorner\!\lrcorner\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$, wobei δ gegeben ist durch

$$
\begin{array}{llclll}
(q_0, & \varnothing) & \mapsto & (q_1, & \llcorner\!\lrcorner, & R), \\
(q_1, & \varnothing) & \mapsto & (q_0, & \llcorner\!\lrcorner, & R), \\
(q_1, & \llcorner\!\lrcorner) & \mapsto & (q_2, & \varnothing, & R).
\end{array}
$$

Blatt 3

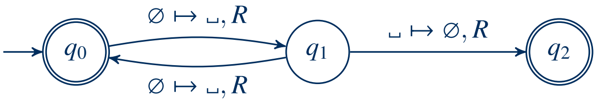
Aufgabe E

Geben Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{A}_{\text{mod2}}$ an, die die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x \bmod 2)$ berechnet. Stellen Sie dabei die Zahlen in unärer Kodierung dar.

Lösungsvorschlag

$\mathcal{A}_{\text{mod2}} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \llcorner\!\lrcorner\}, \delta, q_0, \{q_0, q_2\})$, wobei δ gegeben ist durch

$$
\begin{array}{llcll}
(q_0, & \varnothing) & \mapsto & (q_1, & \llcorner\!\lrcorner, & R), \\
(q_1, & \varnothing) & \mapsto & (q_0, & \llcorner\!\lrcorner, & R), \\
(q_1, & \llcorner\!\lrcorner) & \mapsto & (q_2, & \varnothing, & R).
\end{array}
$$



Blatt 3

Aufgabe F

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Aufgabe F

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Lösungsvorschlag

$f(x_1)$:

$x_0 := 0$

$x_2 := \div(x_1, 10)$

while $x_2 \neq 0$ **do**

$x_0 := x_0 + 1$

$x_2 := \div(x_2, 10)$

end while

Aufgabe F

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor$. Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches f berechnet.

Lösungsvorschlag

$f(x_1)$:

$x_0 := 0$
$x_2 := \div(x_1, 10)$
while $x_2 \neq 0$ **do**
  $x_0 := x_0 + 1$
  $x_2 := \div(x_2, 10)$
end while

$\div(x_1, x_2)$:

$x_3 := x_1 + 0$
$y := x_3 + 1$
$y := y - x_2$ ▷ $(x_3 + 1) - x_2 \neq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq x_2$
while $y \neq 0$ **do**
  $x_0 := x_0 + 1$
  $x_3 := x_3 - x_2$
  $y := x_3 + 1$
  $y := y - x_2$ ▷ $(x_3 - x_2) \geq x_2$
end while

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

Lösungsvorschlag

1. Ja, falls eine Instanz des PKP eine Lösung besitzt, so kann diese mithilfe einer Breitensuche gefunden werden.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

Lösungsvorschlag

1. Ja, jedes Alphabet kann in einem binären Alphabet kodiert werden. Diese Umkodierung ändert nichts an der Unentscheidbarkeit.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_1 \cdots a_n = a_n \cdots a_1$.)

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_1 \cdots a_n = a_n \cdots a_1$.)

Lösungsvorschlag

1. Nein, die Eigenschaft, dass die Sprache einer Turingmaschine ausschließlich aus Palindromen besteht, ist eine nicht-triviale Eigenschaft semi-entscheidbarer Sprachen. Nach dem Satz von Rice ist sie daher unentscheidbar.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

Lösungsvorschlag

1. Ja, um zu prüfen, ob eine Turingmaschine auf einem Wort hält, kann deren Berechnung einfach simuliert werden (etwa mithilfe einer universellen Turingmaschine).

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

Lösungsvorschlag

1. Ja, denn das Halteproblem kann darauf reduziert werden.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Blatt 3

Aufgabe G

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Lösungsvorschlag

1. Nein, zu jeder regulären Sprache **R** gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{L}(\mathcal{A}) = \mathbf{R}$. Der Automat $\mathcal{A}$ kann von einer Turingmaschine simuliert werden, also sind alle regulären Sprachen entscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. **L** hat eine Teilmenge **T** $\subseteq$ **L**, die entscheidbar ist.

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. $\mathbf{L}$ hat eine Teilmenge $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag

1. Wähle $\mathbf{T} = \emptyset$.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. **L** hat eine Obermenge $\mathbf{O} \supseteq \mathbf{L}$, die entscheidbar ist.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. **L** hat eine Obermenge **O** $\supseteq$ **L**, die entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag

1. Wähle **O** $= \Sigma^*$.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei $\mathbf{L}$ eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

1. Beobachtung: $\mathbf{L}$ muss unendlich sein (sonst wäre $\mathbf{L}$ entscheidbar).

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

1. Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
2. Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

1. Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
2. Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.
3. Dann gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}$, die alle entscheidbar sind.

Blatt 4

Aufgabe H

Sei **L** eine unentscheidbare Sprache. Zeigen Sie:

1. Es gibt jeweils nicht nur eine, sondern unendlich viele solcher entscheidbaren Teilmengen bzw. Obermengen.

Lösungsvorschlag

1. Beobachtung: **L** muss unendlich sein (sonst wäre **L** entscheidbar).
2. Ebenso muss $\Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ unendlich sein.
3. Dann gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}$, die alle entscheidbar sind.
4. Ebenso gibt es unendlich viele endliche Teilmengen $\mathbf{F} \subseteq \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$, und alle $\Sigma^* \setminus \mathbf{F} \supseteq \mathbf{L}$ sind entscheidbar.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in P können von einer polynomiell zeitbeschränkten DTM entschieden werden.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in NP können von einer polynomiell zeitbeschränkten NTM entschieden werden.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSpace liegen.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSpace liegen.

Lösungsvorschlag

- Probleme in PSpace können von einer polynomiell platzbeschränkten DTM entschieden werden.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Erläutern Sie, warum $P \subseteq NP \subseteq PSpace$ gilt.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSpace}$ gilt.

Lösungsvorschlag

- Jede DTM ist auch eine NTM, also $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSpace}$ gilt.

Lösungsvorschlag

- Jede DTM ist auch eine NTM, also $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.
- Eine polynomiell platzbeschränkte DTM kann alle (polynomiell großen) Läufe einer polynomiell zeitbeschränkten NTM simulieren und prüfen, ob einer davon akzeptiert. Also $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSpace}$.

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PSpace}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \text{NP}$ und $\mathcal{C} = \text{PSpace}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Lösungsvorschlag

- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-hart, wenn alle Probleme aus $\mathcal{C}$ auf dieses reduziert werden können (in polynomieller Zeit bzw. in logarithmischem Platz).

Blatt 4

Aufgabe I

1. Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PSpace}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart“ bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig“ ist.

Lösungsvorschlag

- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-hart, wenn alle Probleme aus $\mathcal{C}$ auf dieses reduziert werden können (in polynomieller Zeit bzw. in logarithmischem Platz).
- Ein Problem ist $\mathcal{C}$-vollständig, wenn es $\mathcal{C}$-hart ist und in $\mathcal{C}$ liegt.

Blatt 5

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt:

Blatt 5

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{NP}$. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

Blatt 5

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei **L** $\in$ NP. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei **L** $\in$ NP. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Blatt 5

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei **L** $\in$ NP. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in$ NP. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.
$\mathcal{M}$ ist polynomiell zeitbeschränkt, da jeder der n durchzuführenden Tests „$w_i \in \mathbf{L}$“ polynomiell zeitbeschränkt ist.

Aufgabe J

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Lösungsvorschlag

Sei **L** $\in$ NP. Die NTM $\mathcal{M}$ entscheidet $\mathbf{L}^*$ in polynomieller Zeit wie folgt: Bei Eingabe w:

- rate nichtdeterministisch $w_1 w_2 \cdots w_n = w$ mit $w_i \in \Sigma^*$
- teste, ob $w_i \in \mathbf{L}$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Falls alle Tests akzeptieren, akzeptiere; sonst verwerfe.
$\mathcal{M}$ ist polynomiell zeitbeschränkt, da jeder der n durchzuführenden Tests „$w_i \in \mathbf{L}$“ polynomiell zeitbeschränkt ist. Es folgt $\mathbf{L}^* \in$ NP.

Aufgabe M

Wir betrachten folgende Position im Tic-Tac-Toe:

X		
	O	
O		X

Angenommen, Spieler X ist am Zug. Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für X.

Blatt 7 (Aufgabe M fortgesetzt)

Lösungsvorschlag

[redacted]

Blatt 7

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in$ PSpace. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in$ PSpace. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in$ PSpace, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in$ PSpace

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in$ PSpace. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in$ PSpace, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in$ PSpace

damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leq_p \mathbf{L}$, da $\mathbf{L}$ PSpace-vollständig ist

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in$ PSpace. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in$ PSpace, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in$ PSpace

damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leq_p \mathbf{L}$, da $\mathbf{L}$ PSpace-vollständig ist

schließlich folgt $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in \text{PSpace}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

- da $\mathbf{H} \in \text{PSpace}$, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in \text{PSpace}$
- damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leq_p \mathbf{L}$, da $\mathbf{L}$ PSpace-vollständig ist
- schließlich folgt $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$

Also ist $\overline{\mathbf{L}}$ PSpace-hart.

Aufgabe N

Zeigen Sie, dass für jedes PSpace-vollständige Problem $\mathbf{L}$ auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Lösungsvorschlag

Es sei $\mathbf{H} \in$ PSpace. Wir zeigen, dass $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$ gilt:

da $\mathbf{H} \in$ PSpace, gilt auch $\overline{\mathbf{H}} \in$ PSpace

damit ist $\overline{\mathbf{H}} \leq_p \mathbf{L}$, da $\mathbf{L}$ PSpace-vollständig ist

schließlich folgt $\mathbf{H} \leq_p \overline{\mathbf{L}}$

Also ist $\overline{\mathbf{L}}$ PSpace-hart.

Da aber aus $\mathbf{L} \in$ PSpace auch $\overline{\mathbf{L}} \in$ PSpace folgt, dass $\overline{\mathbf{L}}$ auch PSpace-vollständig.

Blatt 7

Aufgabe O

Zeigen Sie: ist $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathsf{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Aufgabe O

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leq_p \mathbf{L}$:

Aufgabe O

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leq_{\mathrm{p}} \mathbf{L}$:
Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen $\mathbf{K} \in \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad f(w) \in \mathbf{L}$$

Blatt 7

Aufgabe O

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ und $\mathbf{K} \in \mathrm{NP}$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbf{K} \leq_p \mathbf{L}$:
Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen $\mathbf{K} \in \mathrm{NP} = \mathrm{P}$ ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \iff f(w) \in \mathbf{L}$$

Damit ist aber f eine Many-One-Reduktion von $\mathbf{K}$ auf $\mathbf{L}$.

Blatt 7

Aufgabe O

Zeigen Sie: ist P = NP, dann sind alle Sprachen **L** $\in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.

Lösungsvorschlag

Sei **L** $\in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ und **K** $\in$ NP. Es genügt zu zeigen, dass **K** $\leq_{\mathrm{p}}$ **L**:
Seien dazu $x_0 \in \overline{\mathbf{L}}$ und $x_1 \in \mathbf{L}$. Wegen **K** $\in$ NP = P ist die Abbildung

$$f(w) := \begin{cases} x_0 & \text{falls } w \notin \mathbf{K} \\ x_1 & \text{falls } w \in \mathbf{K} \end{cases}$$

eine polynomiell zeitberechenbare Funktion, so dass

$$w \in \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad f(w) \in \mathbf{L}$$

Damit ist aber f eine Many-One-Reduktion von **K** auf **L**.
Somit ist **L** NP-vollständig.

Blatt 8

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln

Lösungsvorschlag

Blatt 8

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Teilformeln

Lösungsvorschlag

Teilformeln: F und $\exists y.(p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y)))$ sowie

$p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y))$

$p(c_1, z)$

$q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y)$

$q(x, c_2, z)$

$p(c_2, y)$

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Terme

Lösungsvorschlag

Terme sind hier nur Variablen und Konstanten, da keine weiteren Funktionssymbole vorhanden sind. Also: c_1, z, x, c_2, y.

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. die Menge aller Variablen mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen

Lösungsvorschlag

Gebundene Variablen: x, y, freie Variablen: z.

Blatt 8

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

1. ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$

Lösungsvorschlag

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ mit $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a\}$, $c_1^{\mathcal{I}} = c_2^{\mathcal{I}} = a$, $p^{\mathcal{I}} = \{(a, a)\}$, $q^{\mathcal{I}} = \{(a, a, a)\}$, $\mathcal{Z}(z) = a$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$.

Blatt 8

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$.

Blatt 8

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Im Fall (ii) gilt $\mathcal{I} \models F \to G$ ebenso.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Im Fall (ii) gilt $\mathcal{I} \models F \to G$ ebenso. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\emptyset \models F \to G$.

Blatt 8

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Im Fall (ii) gilt $\mathcal{I} \models F \to G$ ebenso. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\emptyset \models F \to G$.
   "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\emptyset \models F \to G$ auch $\mathcal{I} \models G$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Im Fall (ii) gilt $\mathcal{I} \models F \to G$ ebenso. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\emptyset \models F \to G$.
   "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\emptyset \models F \to G$ auch $\mathcal{I} \models G$. Also gilt $\{F\} \models G$.

Blatt 8

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.
2. Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

1. Zu zeigen $\{F\} \models G \iff \emptyset \models F \to G$.

   "$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation. Es gilt (i) $\mathcal{I} \models F$ oder (ii) $\mathcal{I} \not\models F$. Im Fall (i) gilt $\mathcal{I} \models G$, da $\{F\} \models G$, und daher auch $\mathcal{I} \models F \to G$. Im Fall (ii) gilt $\mathcal{I} \models F \to G$ ebenso. Da $\mathcal{I}$ beliebig gewählt, folgt $\emptyset \models F \to G$.
   "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \{F\}$. Dann gilt wegen $\emptyset \models F \to G$ auch $\mathcal{I} \models G$. Also gilt $\{F\} \models G$.
2. analog.

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \wedge \neg G) \equiv \forall x.F \wedge \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg\exists x.G$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg\exists x.G$.
Insgesamt gilt: $\mathcal{I} \not\models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$.

Blatt 8

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Lösungsvorschlag

$\Rightarrow$: Sei $\mathcal{I} \models \exists x.(F \to G)$. Dann gibt es $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F \to G$.
Gilt nun $\mathcal{I} \models \forall x.F$, dann auch insbesondere $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$.
Also auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models G$ und $\mathcal{I} \models \exists x.G$.
Zusammengenommen erhalten wir so $\mathcal{I} \models \forall x.F \to \exists x.G$.

$\Leftarrow$: Sei nun $\mathcal{I} \models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$ und angenommen $\mathcal{I} \not\models \exists x.(F \to G)$.
Dann gilt für alle $a \in \Delta^{\mathcal{I}}$ auch $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \models F$ und $\mathcal{I}, [x \mapsto a] \not\models G$.
m.a.W. $\mathcal{I} \models \forall x.(F \land \neg G) \equiv \forall x.F \land \forall x.\neg G$
Also $\mathcal{I} \models \forall x.F$ und $\mathcal{I} \models \forall x \neg G \equiv \neg\exists x.G$.
Insgesamt gilt: $\mathcal{I} \not\models (\forall x.F) \to (\exists x.G)$. Widerspruch!

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Falsch, zum Beispiel $\exists x.p(x)$ ist in Pränexform, aber nicht in Skolemform

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Ja, denn die Anforderung an eine Skolemform ist stärker als die an eine Pränexform

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Ja, denn durch Umbenennung von Variablen kann jede Formel in eine äquivalente bereinigte Formel überführt werden.

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Ja, da nach einer Bereinigung der Formel die Quantoren nach vorn geschoben werden können.

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Blatt 9

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
2. Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
3. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
4. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
5. Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Lösungsvorschlag

Nein, z.B. $\exists x.p(x)$ ist nicht äquivalent zu einer bereinigten Formel

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

$$F_a := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

$$F_a := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b := \forall x.((\text{Drache}(x) \wedge \text{grün}(x)) \to \text{fliegen}(x))$$

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: $\text{Drache}(x)$, $\text{glücklich}(x)$, $\text{Kind}(x, y)$, $\text{fliegen}(x)$, $\text{grün}(x)$.

$$F_a \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b \coloneqq \forall x.((\text{Drache}(x) \land \text{grün}(x)) \to \text{fliegen}(x))$$

$$F_c \coloneqq \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\exists y.(\text{Kind}(y, x) \land \text{Drache}(y) \land \text{grün}(y)) \to \text{grün}(x)))$$

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: Drache(x), glücklich(x), Kind(x, y), fliegen(x), grün(x).

$$F_a := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b := \forall x.((\text{Drache}(x) \land \text{grün}(x)) \to \text{fliegen}(x))$$

$$F_c := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\exists y.(\text{Kind}(y, x) \land \text{Drache}(y) \land \text{grün}(y)) \to \text{grün}(x)))$$

$$F_d := \forall x.((\text{Drache}(x) \land \text{grün}(x)) \to \text{glücklich}(x))$$

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Neue Prädikate: $\text{Drache}(x)$, $\text{glücklich}(x)$, $\text{Kind}(x, y)$, $\text{fliegen}(x)$, $\text{grün}(x)$.

$$F_a := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\forall y.(\text{Kind}(x, y) \to \text{fliegen}(y)) \to \text{glücklich}(x)))$$

$$F_b := \forall x.((\text{Drache}(x) \land \text{grün}(x)) \to \text{fliegen}(x))$$

$$F_c := \forall x.(\text{Drache}(x) \to (\exists y.(\text{Kind}(y, x) \land \text{Drache}(y) \land \text{grün}(y)) \to \text{grün}(x)))$$

$$F_d := \forall x.((\text{Drache}(x) \land \text{grün}(x)) \to \text{glücklich}(x))$$

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

⇒ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

⇒ nach F_b kann y dann auch fliegen

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

$\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache

$\Rightarrow$ nach F_b kann y dann auch fliegen

$\Rightarrow$ das bedeutet, dass alle Kinder von x fliegen können

Blatt 9

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
b) Grüne Drachen können fliegen.
c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Lösungsvorschlag

Sei x nun ein grüner Drache, und sei y ein Kind von x (welches ein Drache ist).

- $\Rightarrow$ dann ist nach F_c auch y ein grüner Drache
- $\Rightarrow$ nach F_b kann y dann auch fliegen
- $\Rightarrow$ das bedeutet, dass alle Kinder von x fliegen können
- $\Rightarrow$ mit F_a folgt daraus, dass x glücklich ist

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.

Lösungsvorschlag

Ja, folgt aus dem Deduktionstheorem (VL 14/25).

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.

Lösungsvorschlag

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.

Lösungsvorschlag

Nein, es gibt erfüllbare Formeln, die nur unendliche Modelle besitzen (vgl. VL 20/20).

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.

Lösungsvorschlag

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.

Lösungsvorschlag

Ja, ebenfalls nach dem Satz von Löwenheim-Skolem (VL 20/20).

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.

Lösungsvorschlag

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.

Lösungsvorschlag

Nein, da die Wahl der Prädikatensymbole noch offen ist.

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Lösungsvorschlag

Blatt 10

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Lösungsvorschlag

Nein, dies ist nur dann der Fall, wenn die Formel erfüllbar ist.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.

Ist $\mathcal{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathcal{I}$ auch ein Modell für F.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.
Ist $\mathcal{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathcal{I}$ auch ein Modell für F.
Damit ist $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, es gilt $\Gamma \models F$.
Ist $\mathcal{I}$ ein Modell für Γ, dann ist $\mathcal{I}$ auch ein Modell für F.
Damit ist $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$.
Also ist $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathcal{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathcal{I}$ auch Modell für Γ.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathcal{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathcal{I}$ auch Modell für Γ.
Weil $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist, kann $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathcal{I}$ Modell für $\bigwedge \Gamma$, dann ist $\mathcal{I}$ auch Modell für Γ.
Weil $\Gamma \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist, kann $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.
Also gilt $\mathcal{I} \models F$, und damit ist $\bigwedge \Gamma \to F$ allgemeingültig.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
Dann ist jedes Modell $\mathcal{I}$ von $\bigwedge \Gamma$ auch Modell von F.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
Dann ist jedes Modell $\mathcal{I}$ von $\bigwedge \Gamma$ auch Modell von F.
Also ist $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ unerfüllbar.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Blatt 10

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathcal{I}$ ein Modell für Γ, dann kann $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

1. $\Gamma \models F$.
2. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
3. $\bigwedge \Gamma \to F$ ist allgemeingültig.
4. $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Lösungsvorschlag

Angenommen, $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.
Ist $\mathcal{I}$ ein Modell für Γ, dann kann $\mathcal{I}$ kein Modell für $\neg F$ sein.
Also folgt $\mathcal{I} \models F$, und damit $\Gamma \models F$.

Aufgabe W

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen,
die sich nicht selbst rasieren.

Aufgabe W

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Lösungsvorschlag

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Aufgabe W

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Lösungsvorschlag

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \vee \neg p(x,x)) \wedge (p(x,x) \vee p(b,x)))$

Blatt 11

Aufgabe W

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

Lösungsvorschlag

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \vee \neg p(x,x)) \wedge (p(x,x) \vee p(b,x)))$
Daraus ergibt sich die Klauselmenge:

$$\{\{\neg p(b,x), \neg p(x,x)\}, \{p(x,x), p(b,x)\}\}$$

Blatt 11

Aufgabe W

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution, dass die Formulierung des Barbier-Paradoxons aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 9 unerfüllbar ist:

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen,
die sich nicht selbst rasieren.

Lösungsvorschlag

Die Formalisierung des Barbierproblems war:

$$\forall x.((p(b,x) \leftrightarrow \neg p(x,x)))$$

Umformuliert: $\forall x.((\neg p(b,x) \vee \neg p(x,x)) \wedge (p(x,x) \vee p(b,x)))$
Daraus ergibt sich die Klauselmenge:

$$\{\{\neg p(b,x), \neg p(x,x)\}, \{p(x,x), p(b,x)\}\}$$

Mit Anwendung des Unifikators $\{x \mapsto b\}$ ergibt sich sofort die leere Klausel.