

# THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

## 13. Vorlesung: Prädikatenlogik: Syntax und Semantik

Markus Krötzsch  
Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 1. Juni 2018

### Überblick Berechenbarkeit

#### Vorlesung 1

Hilbert in Paris • Die Turingmaschine • Church-Turing-These

#### Vorlesung 2

Berechenbarkeit • Entscheidbarkeit • Busy Beaver

#### Vorlesung 3

LOOP • WHILE • Turing-Mächtigkeit von WHILE

#### Vorlesung 4

Die Kraft des LOOP • Halteproblem • Reduktionen

#### Vorlesung 5

Satz von Rice • Semi-Entscheidbarkeit  
Postisches Korrespondenzproblem

#### Vorlesung 6

Probleme formaler Sprachen • Noch unentscheidbarere Probleme  
Euklid als Informatiker

## Halbzeit: Zusammenfassung und Ausblick

### Überblick Komplexität

#### Vorlesung 7

Königsberger Brücken • Beschränkte TMs • Robuste Komplexitäten

#### Vorlesung 8

Zeit vs. Raum • P und L • Polynomielle Reduktionen

#### Vorlesung 9

Coles Beweis ohne Worte • NP

**$SAT \leq_p \text{Clique} \leq_p \text{Unabhängige Menge}$**

#### Vorlesung 10

**$SAT \leq_p \text{Teilmengen Summe} \leq_p \text{Rucksack}$**

Pseudopolynomialität • Fake News zu NP

#### Vorlesung 11

NL und Erreichbarkeit • Schach ist schwer • PSpace und QBF

#### Vorlesung 12

**$\text{TrueQBF} \leq_p \text{TrueQBF}_{\text{alt}} \leq_p \text{Geography} \bullet \text{Spiele}$**

## Ausblick: Prädikatenlogik

### Vorlesung 13

Logik erster Stufe: Syntax und Semantik

### Vorlesung 14

Modelltheorie • Logisches Schließen

### Vorlesung 15

Gleichheit • Unentscheidbarkeit der Schließens

### Vorlesung 16

Ableitungskalküle • syntaktische Umformungen

### Vorlesung 17

Normalformen • Funktionssymbole • Skolemisierung

### Vorlesung 18

Unifikation • Substitutionen

### Vorlesung 19

Resolution • Herbrand • Löwenheim-Skolem

## Ausblick: Logik und mehr

### Vorlesung 20

Korrektheit der Resolution • endliche Modelle

### Vorlesung 21

Datalog • Logikprogrammierung

### Vorlesung 22

Logik höherer Ordnung • entscheidbare Fragmente

### Vorlesung 23

Logik auf natürlichen Zahlen • Gödel

### Vorlesung 24

Gödel & Turing • Zusammenfassung • Ausblick

## Prädikatenlogik

## Logik

Aristoteles (384–324 v.Chr.):

„Alle Menschen sind sterblich.“

„Sokrates ist ein Mensch.“

---

„Also ist Sokrates sterblich.“

## Gut, aber in der Informatik?

Wozu lehrt man Informatiker\_innen Logik?

- **Verifikation von Software:** Logik als Spezifikationssprache gewünschter Eigenschaften
- **Künstliche Intelligenz:** Logik als Lehre vom folgerichtigen Denken
- **Optimierung:** Logisches Schließen als Suche nach Lösungen komplexer Probleme
- **Datenverwaltung:** Logik als eindeutig definiertes Format für Daten und Anfragen
- **Wissensrepräsentation:** Logik zur Darstellung und Anwendung von menschlichem Wissen in Form von Regeln, Taxonomien und Ontologien

## Rückblick: Semantik der Aussagenlogik

Eine aussagenlogische Formel kann wahr oder falsch sein, je nachdem, wie man die atomaren Aussagen interpretiert. Dazu verwenden wir eine **Wertzweisung**  $w : \mathbf{P} \rightarrow \{1, 0\}$ .

Eine Wertzweisung  $w$  erfüllt eine Formel  $F$ , in Symbolen  $w \models F$ , wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von $F$	$w \models F$ wenn:	$w \not\models F$ wenn:
$F \in \mathbf{P}$ :	$w(F) = 1$	$w(F) = 0$
$F = \neg G$	$w \not\models G$	$w \models G$
$F = (G_1 \wedge G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ oder $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \vee G_2)$	$w \models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \rightarrow G_2)$	$w \not\models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \leftrightarrow G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \models G_2$

Dabei bedeutet „A oder B“ immer „A oder B oder beides“.

## Rückblick: Syntax der Aussagenlogik

In der Aussagenlogik gibt es eine abzählbar unendliche Menge  $\mathbf{P}$  von **atomaren Aussagen** (auch bekannt als: **aussagenlogische Variablen**, **Propositionen** oder schlicht **Atome**)

Die Menge der **aussagenlogischen Formeln** ist induktiv<sup>a</sup> definiert:

- Jedes Atom  $p \in \mathbf{P}$  ist eine aussagenlogische Formel
- Wenn  $F$  und  $G$  aussagenlogische Formeln sind, so auch:
  - $\neg F$ : **Negation**, „nicht  $F$ “
  - $(F \wedge G)$ : **Konjunktion**, „ $F$  und  $G$ “
  - $(F \vee G)$ : **Disjunktion**, „ $F$  oder  $G$ “
  - $(F \rightarrow G)$ : **Implikation**, „ $F$  impliziert  $G$ “
  - $(F \leftrightarrow G)$ : **Äquivalenz**, „ $F$  ist äquivalent zu  $G$ “

<sup>a</sup>Das bedeutet: Die Definition ist selbstbezüglich und soll die kleinste Menge an Formeln beschreiben, die alle Bedingungen erfüllen.

## Von Aussagen- zu Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik gibt atomaren Aussagen eine innere Struktur:

- aus „ $P$ Sokrates-ist-ein-Mensch“ wird
- „istMensch(sokrates)“

Dadurch können mehrere Dinge die selbe Eigenschaft haben:

istMensch(sokrates) istMensch(emilia) istMensch(anton) ...

Für allgemeine Aussagen über die Dinge, die eine Eigenschaft haben, gibt es zwei **Quantoren**:

- **Existenzquantor  $\exists$** : Mindestens ein Ding hat die Eigenschaft
- **Allquantor  $\forall$** : Alle Dinge haben die Eigenschaft

## Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich.“

$$\forall x.(\text{istMensch}(x) \rightarrow \text{istSterblich}(x))$$

„Es ist nicht alles Gold was glänzt.“

(a)  $\forall x.(\text{glänzt}(x) \wedge \neg \text{istGold}(x))$  falsch

(b)  $\forall x.(\text{glänzt}(x) \rightarrow \neg \text{istGold}(x))$  falsch

(c)  $\neg \forall x.(\text{glänzt}(x) \rightarrow \text{istGold}(x))$  richtig

(d)  $\exists x.(\text{glänzt}(x) \wedge \neg \text{istGold}(x))$  richtig

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$\text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x.(\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y.(\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

## Intuitive Semantik: Logelei

In einem entlegenen Inselreich gibt es zwei Arten von Menschen:

- die einen (Typ W) sagen stets die Wahrheit
- die anderen (Typ L) lügen immer

Wir besuchen einige der Inseln und fragen die Einheimischen nach dem Typ der Bewohner dort.

- Auf **Insel A** antwortet jeder der Bewohner:  
„Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“
  - Stimmt das? Und wenn ja, von welchem Typ sind sie?
- Auf **Insel B** antwortet jeder der Bewohner:  
„Hier gibt es einige vom Typ W und einige vom Typ L.“
  - Was sagt uns das über die Typen der Bewohner von B?

## Prädikatenlogik: Syntax (1)

In der Aussagenlogik gab es eine unendliche Menge von Atomen.

In der Prädikatenlogik betrachten wir stattdessen mehrere Mengen:

- Eine Menge **V** von **Variablen**  $x, y, z, \dots$
- Eine Menge **C** von **Konstanten**  $a, b, c, \dots$
- Eine Menge **P** von **Prädikatsymbolen**  $p, q, r, \dots$   
jedes Prädikat hat eine **Stelligkeit**  $\geq 0$  (auch **Arität** genannt)

Variablen und Konstanten werden auch **Terme** genannt.

Diese Mengen sind:

- (1) **abzählbar unendlich** (d.h. wir haben immer ausreichend Symbole jeden Typs zur Verfügung)
- (2) **disjunkt** (d.h. es ist stets klar, welcher Art ein Symbol ist)

Ein prädikatenlogisches **Atom** ist ein Ausdruck  $p(t_1, \dots, t_n)$  für ein  $n$ -stelliges Prädikatsymbol  $p \in \mathbf{P}$  und Terme  $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{V} \cup \mathbf{C}$ .

## Prädikatenlogik: Syntax (2)

Formeln werden jetzt wie in der Aussagenlogik aus Atomen aufgebaut:

Die Menge der **prädikatenlogischen Formeln** ist induktiv definiert:

- Jedes Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  ist eine prädikatenlogische Formel
- Wenn  $x \in \mathbf{V}$  eine Variable und  $F$  und  $G$  prädikatenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden prädikatenlogische Formeln:
  - $\neg F$ : **Negation**, „nicht  $F$ “
  - $(F \wedge G)$ : **Konjunktion**, „ $F$  und  $G$ “
  - $(F \vee G)$ : **Disjunktion**, „ $F$  oder  $G$ “
  - $(F \rightarrow G)$ : **Implikation**, „ $F$  impliziert  $G$ “
  - $(F \leftrightarrow G)$ : **Äquivalenz**, „ $F$  ist äquivalent zu  $G$ “
  - $\exists x.F$ : **Existenzquantor**, „für ein  $x$  gilt  $F$ “
  - $\forall x.F$ : **Allquantor**, „für alle  $x$  gilt  $F$ “

# Funktionssymbole

**Anmerkung:** Oft werden in der Prädikatenlogik Funktionssymbole betrachtet, die in Termen (zusätzlich zu Variablen und Konstanten) vorkommen dürfen.

Wir verzichten hier vorerst darauf, da

- dies die Definition komplexer (und eventuell verwirrender) macht,
- man damit keine zusätzliche Ausdruckstärke erhält und
- wir diese Erweiterung für spezielle Anwendungen leicht auch später noch einführen können.

# Teilformeln

Die **Teilformeln** einer Formel sind alle Teilausdrücke der Formel, welche selbst Formeln sind.

Die Menge der Teilformeln ist eindeutig bestimmt, wenn man der formalen Definition der Formel folgt.

Beispiel: Die Teilformeln von  $\forall x.(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$  sind  $(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$ ,  $(q(x) \vee r(x))$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  sowie die Formel selbst, aber nicht  $p(x) \vee (q(x)$  oder  $\forall x.(p(x)$ .

**Anmerkung:** Lässt man manche Klammern zur Vereinfachung der Syntax weg, dann sind die Teilformeln nicht mehr eindeutig bestimmt.

Beispiel:  $\forall x.(p(x) \vee q(x) \vee r(x))$  könnte sowohl  $\forall x.(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$  als auch  $\forall x.((p(x) \vee q(x)) \vee r(x))$  bezeichnen, was zu unterschiedlichen Teilformeln führt.

# Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende **Vereinfachungen der Syntax**:

- (1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.  
Beispiel: wir schreiben  $(p \rightarrow q)$  anstelle von  $(p() \rightarrow q())$
- (2) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.  
Beispiel: wir schreiben  $p \rightarrow q$  statt  $(p \rightarrow q)$
- (3) Klammern innerhalb geschachtelter Konjunktionen und Disjunktionen dürfen weggelassen werden.  
Beispiel: wir schreiben  $p \wedge q \wedge r$  statt  $p \wedge (q \wedge r)$
- (4) Hintereinander vorkommende Quantoren gleicher Art werden zusammengefasst, wobei man die Variablen als Liste angibt.  
Beispiel: wir schreiben  $\forall x, x'. \exists y, y'. (p(x, x') \rightarrow p(y, y'))$  statt  $\forall x, \forall x'. \exists y, \exists y'. (p(x, x') \rightarrow p(y, y'))$

Ansonsten schreiben wir Formel immer gemäß der formalen Syntax, einschließlich aller Klammern.

# Freie und gebundene Variablenvorkommen

Eine Variable kann in einer Formel entweder **frei** oder **gebunden** vorkommen:

Die **freien Vorkommen** von Variablen in einer Formel sind rekursiv wie folgt definiert:

- In einem Atom sind alle Vorkommen von Variablen frei.
- Die freien Vorkommen in  $\neg F$  sind die selben wie in  $F$
- Die freien Vorkommen in  $(F \wedge G)$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \rightarrow G)$  und  $(F \leftrightarrow G)$  sind alle freien Vorkommen aus  $F$  und  $G$
- Die freien Vorkommen in  $\forall x.F$  und  $\exists x.F$  sind die selben wie in  $F$ , ohne die Vorkommen von  $x$  in  $F$

Damit sind Vorkommen von Variablen  $x$  genau dann **gebunden** wenn sie im Bereich eines Quantors auftauchen.

Beispiel: Eine Variable kann gleichzeitig frei und gebunden in einer Formel auftauchen, wie z.B.  $x$  in  $p(x) \wedge \exists x.q(x)$ .

# Offene und geschlossene Formeln

Formeln ohne freie Vorkommen von Variablen heißen **geschlossene Formeln** oder **Sätze**.

**Anmerkung:** Eigentlich würde man sich oft gern auf Sätze beschränken (da sie geschlossene Aussagen darstellen).

Leider muss man sich dennoch mit offenen Formeln beschäftigen, weil diese auftauchen, sobald man die Teilformeln einer geschlossenen Formel anschaut (dies tun wir in vielen Definitionen und Beweisen).

Formeln mit freien Vorkommen von Variablen heißen **offene Formeln**.

## Atome interpretieren

**Grundgedanke:** Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist  $p(a, x)$  mit  $a \in \mathbf{C}$  und  $x \in \mathbf{V}$ . Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet  $p$ ?  
Prädikatssymbole stehen für Relationen gleicher Stelligkeit
- Was bedeutet  $a$ ?  
Konstanten stehen für Elemente, die in Relationen stehen können
- Was bedeutet  $x$ ?  
Variablen stehen auch für Elemente, aber ihre verschiedenen Vorkommen können für verschiedene Elemente stehen

Ein Atom  $p(a, x)$  ist also wahr, wenn zwischen dem Element, für das  $a$  steht, und dem Element, für das  $x$  steht, die Relation besteht, für die  $p$  steht.

# Semantik der Prädikatenlogik

## Interpretationen

Die Wertzuweisung der Aussagenlogik wird also durch **Interpretationen** und **Zuweisungen** für Variablen ersetzt.

Eine **Interpretation**  $\mathcal{I}$  ist ein Paar  $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$  bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge von Elementen  $\Delta^{\mathcal{I}}$  (der **Domäne**) und einer **Interpretationsfunktion**  $\cdot^{\mathcal{I}}$ , welche:

- jede Konstante  $a \in \mathbf{C}$  auf ein Element  $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  und
- jedes  $n$ -stellige Prädikatensymbol  $p \in \mathbf{P}$  auf eine Relation  $p^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$

abbildet.

Eine **Zuweisung**  $\mathcal{Z}$  für eine Interpretation  $\mathcal{I}$  ist eine Funktion  $\mathcal{Z} : \mathbf{V} \rightarrow \Delta^{\mathcal{I}}$ , die Variablen auf Elemente der Domäne abbildet. Für  $x \in \mathbf{V}$  und  $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$  schreiben wir  $\mathcal{Z}[x \mapsto \delta]$  für die Zuweisung, die  $x$  auf  $\delta$  und alle anderen Variablen  $y \neq x$  auf  $\mathcal{Z}(y)$  abbildet.

## Beispiel (1)

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$\text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x. (\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y. (\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

Wir betrachten eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\text{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der natürlichen Zahlen
- $\text{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e \rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Unter dieser Interpretation ist das Atom  $\text{NatNum}(\text{null})$  wahr, da  $\text{null}^{\mathcal{I}} \in \text{NatNum}^{\mathcal{I}}$  gilt.

Wir schreiben:  $\text{NatNum}(\text{null})^{\mathcal{I}} = 1$ .

## Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei  $\mathcal{I}$  eine Interpretation und  $\mathcal{Z}$  eine Zuweisung für  $\mathcal{I}$ .

- Für eine Konstante  $c$  definieren wir  $c^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable  $x$  definieren wir  $x^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$

Für ein Atom  $p(t_1, \dots, t_n)$  setzen wir sodann:

- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$  und
- $p(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$  wenn  $\langle t_1^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$ .

**Achtung!** Wir verwenden Interpretationen und Zuweisungen auf zwei Ebenen, die man nicht verwechseln sollte:

- (1) um Terme  $t$  auf Elemente  $t^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$  abzubilden
- (2) um Atome  $A$  auf Wahrheitswerte  $A^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} \in \{0, 1\}$  abzubilden

## Beispiel (2)

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$\text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x. (\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y. (\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

Wir betrachten für die vorherige Interpretation  $\mathcal{I}$  eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  mit

- $\mathcal{Z}(x) = 42$
- $\mathcal{Z}(y) = 5$

Unter dieser Interpretation und Zuweisung ist das Atom  $\text{succ}(x, y)$  falsch, da  $\langle \mathcal{Z}(x), \mathcal{Z}(y) \rangle \notin \text{succ}^{\mathcal{I}}$  gilt.

Wir schreiben:  $\text{succ}(x, y)^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$ .

Anmerkung: Allgemein geben wir bei Interpretationen und Zuweisungen nur die Belegungen an, die für die Auswertung einer gegebenen Formel relevant sind. Zum Beispiel müssen wir  $\mathcal{Z}$  nicht für alle  $z \in \mathbf{V}$  definieren.

## Formeln interpretieren

Eine Interpretation  $\mathcal{I}$  und eine Zuweisung  $\mathcal{Z}$  für  $\mathcal{I}$  erfüllen eine Formel  $F$ , in Symbolen  $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ , wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Formel $F$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ wenn:	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models F$ wenn:
$F$ Atom	$F^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 1$	$F^{\mathcal{I}, \mathcal{Z}} = 0$
$\neg G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$
$(G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \vee G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \rightarrow G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \leftrightarrow G_2)$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_2$ oder $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G_2$
$\forall x.G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$
$\exists x.G$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$

## Beispiel

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$F = \text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x. (\text{NatNum}(x) \rightarrow \exists y. (\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y)))$$

Wir betrachten eine Interpretation  $\mathcal{I}$  mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen
- $\text{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\text{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  die Menge der natürlichen Zahlen
- $\text{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e \rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Dann gilt  $\mathcal{I} \models F$  (unter jeder beliebigen Zuweisung).

Notation: Bei der Interpretation von Sätzen (Formeln ohne freie Variablen) spielen Zuweisungen keine Rolle. Wir schreiben sie in diesem Fall nicht.

## Zusammenfassung und Ausblick

Prädikatenlogik verallgemeinert Aussagenlogik mit  $n$ -stelligen Prädikaten, Termen und Quantoren

Zur Auswertung von Formeln benötigen wir eine Interpretation und eine Variablenzuweisung

Was erwartet uns als nächstes?

- Logisches Schließen
- Entscheidbare logische Probleme
- Unentscheidbare logische Probleme

## Intuitive Semantik: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W und Typ L.

Smullyan<sup>1</sup> fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

- Auf **Insel A** antwortete jeder der Bewohner:  
„Jeder, der hier von Typ W ist, raucht.“
- Auf **Insel B** antwortete jeder der Bewohner:  
„Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen.“
- Auf **Insel C** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Falls ich rauche, dann raucht jeder hier.“
- Auf **Insel D** hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:  
„Einige hier rauchen, aber ich nicht.“

Was können wir jeweils über die Bewohner und ihre Gewohnheiten schließen?

<sup>1</sup>R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014