Technische Universität Dresden

Formale Systeme

1. Repititorium: Sprachen, Grammatiken und Automaten

Stephan Mennicke

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 18. Dezember 2025

Buchstaben, Alphabete und Sprachen

Aufgabe S1)

Es seien $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$\Sigma_1^\star$ Menge aller Wörter über Σ_1, also a, b, c:
$\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$

Σ_1^+ Menge aller nicht leeren Wörter über Σ_1, also a, b, c:
$\{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, \ldots\}$

Σ_1^2 Menge aller Wörter über Σ_1 der Länge 2:
$\{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

$\Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^\star$ Menge aller Wörter über $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, also a, b, c, 0, 1, die mit a, b oder c beginnen:
$\{a, b, c, aa, ab, ac, a0, a1, ba, bb, bc, b0, b1, ca, cb, cc, c0, c1, aaa, aab, \ldots\}$

$\mathcal{P}(\Sigma_1)$ Menge aller Teilmengen von Σ_1:
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\mathcal{P}(\Sigma_1^*)$ Menge aller Teilmengen von Σ_1^*:
$\mathcal{P}(\Sigma_1) \cup \{\ldots\}$

Aufgabe S2)

Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$	$\{a, b, c\}$
$\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\}$	$\{abc\}$
$\{a\} \cup \{b\} \circ \{a\} \cup \{b\}$	$\{a, ba, b\}$
$\{a\}^*$	$\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
$(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*$	siehe S1) mit Σ_1^*
$(\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\})^*$	$\{\varepsilon, abc, abcabc, abcabcabc, \ldots\}$
$\{a\} \cup \{a\}^* \circ \{b\}$	$\{a, b, ab, aab, aaab, \ldots\}$
$(\{0\} \cup \{1\})^*$	$\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 001, 010, 011, \ldots\}$
$(\{1\} \cup \{1\} \circ \{0\})^*$	$\{\varepsilon, 1, 10, 11, 101, 110, 1010, 1111, \ldots\}$

$(\{0\} \cup \{1\})^* \circ \{0\} \circ \{0\} \circ (\{0\} \cup \{1\})^*$

$\{00, 000, 001, 100, 0000, 0001, 1000, 1001, 00000, 00001, 00010, 00011, 00100, \ldots\}$

Aufgabe S4)

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Identität

$$({L_1}^* \circ {L_2}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^* \,.$$

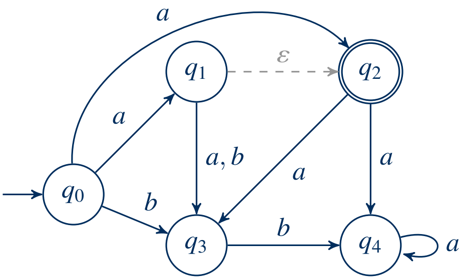
⊆: Jedes Wort $w \in (L_1^* \circ L_2^*)^*$ lässt sich per Definition (Kleenestern) in $k \in \mathbb{N}$ Teilwörter $v_1 v_2 \cdots v_k$ zerlegen, sodass $v_i \in (L_1^* \circ L_2^*)$ $1 \leq i \leq k$.Jedes Teilwort $v_i \in (L_1^* \circ L_2^*)$ $(1 \leq i \leq k)$ lässt sich in $v_i^1 \in L_1^*$ und $v_i^2 \in L_2^*$ zerlegen.Da $L_j \subseteq L_1 \cup L_2$ $(j \in \{1, 2\})$, gilt $v_i^j \in (L_1 \cup L_2)^*$ und somit ist $v_i \in (L_1 \cup L_2)^*$.Das Wort w stannt also aus der Sprache $((L_1 \cup L_2)^*)^*$ und somit gilt $w \in (L_1 \cup L_2)^*$ (siehe Übung 1, Aufgabe 2.d).

⊇: Für $w \in (L_1 \cup L_2)^*$ gibt es eine Zerlegung $v_1 v_2 \cdots v_k$, sodass $v_i \in L_1$ oder $v_i \in L_2$ $(1 \leq i \leq k)$.Falls $v_i \in L_1$, gilt $v_i = v_i \varepsilon \in L_1^* \circ L_2^*$.Analog $v_i = \varepsilon v_i \in L_1^* \circ L_2^*$ falls $v_i \in L_2$.Damit gilt $w \in (L_1^* \circ L_2^*)^*$.

Sprachen und Automaten

Aufgabe S5)

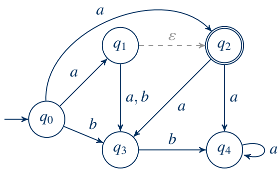
Es sei der ε-NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, \ldots, q_4\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ gegeben mit δ wie unten graphisch dargestellt:



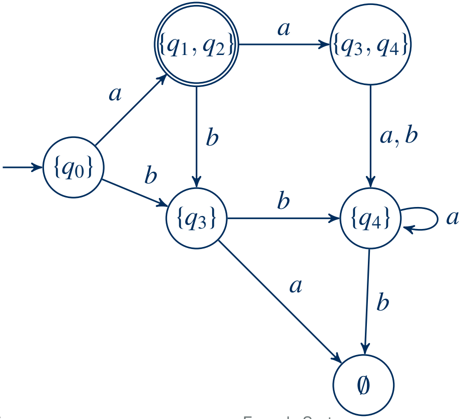
Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$.

Zunächst eliminieren wir den ε-Übergang, zum Beispiel per Verlängerung nach rechts. Nun führen wir die Potenzautomatenkonstruktion durch und erreichen damit den DFA $\mathcal{M}'$.

Aufgabe S5)



a
q_1
ε
q_2
a
a, b
a
a
q_0
b
q_3
b
q_4
a



$\{q_1, q_2\}$
a
$\{q_3, q_4\}$
a
b
a, b
$\{q_0\}$
b
$\{q_3\}$
b
$\{q_4\}$
a
a
b
$\emptyset$

Aufgabe S6)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie NFAs $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ an mit

1. $L(\mathcal{M}_1) = \{w \in \Sigma^* \mid (|w|_a$ ist ungerade und $|w|_b$ ist gerade) oder
   (es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv)\}$
2. $L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \Sigma^* \mid$ (es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ubabcv$) und
   (es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$) und
   (es gibt kein $u \in \Sigma^*$ mit $w = au)\}$

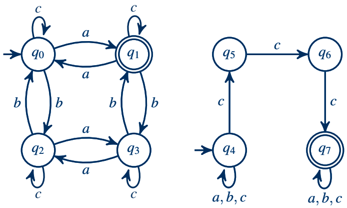
Idee für beide: Eigenschaften einzeln modellieren und dann Automatenkonstruktoren verwenden.

Aufgabe S6a)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen NFA $\mathcal{M}_1$ an mit $w \in L(\mathcal{M}_1)$ genau dann, wenn

- $|w|_a$ ist ungerade und $|w|_b$ ist gerade,
- oder es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$.

$\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, \ldots, q_7\}, \Sigma, \delta, \{q_0, q_4\}, \{q_1, q_7\})$ mit

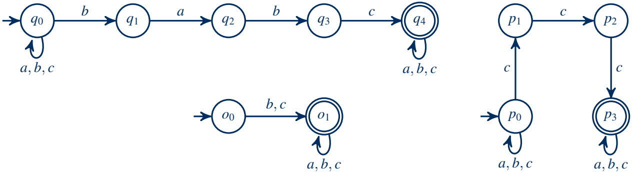


Aufgabe S6b)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie einen NFA $\mathcal{M}_2$ an mit $w \in L(\mathcal{M}_2)$ genau dann, wenn

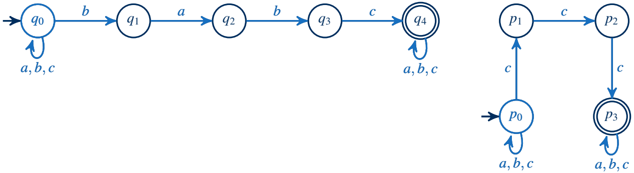
- es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ubabcv$,
- es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$, und
- es gibt kein $u \in \Sigma^*$ mit $w = au$.

$\mathcal{M}_2$ entsteht als Produktautomat der folgenden drei Automaten:

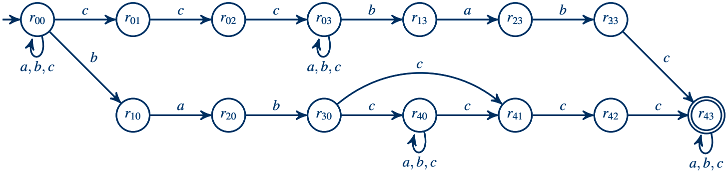


Aufgabe S6b)

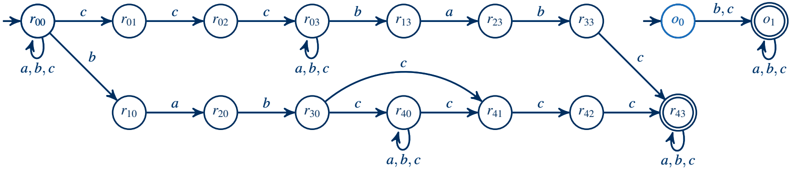
Erstes Produkt:



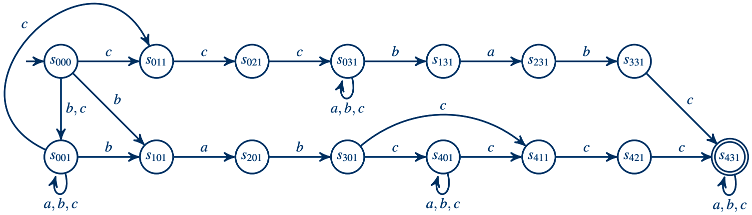
Konstruktion des Produktautomaten:



Aufgabe S6b)



Konstruktion von $\mathcal{M}_2$:



Aufgabe S7)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to \varepsilon \mid aTb\}$.

Geben Sie eine Grammatik G' an mit $L(G') = \{w \in \{a, b\}^* \mid w^R \in L(G)\}$, wobei w^R das gespiegelte Wort zu w ist.

$G' = (V, \Sigma, P', S)$ mit $P' = \{A \to w^R \mid A \to w \in P, A \in V, w \in (\Sigma \cup V)^*\}$,

d.h.

$$
\begin{aligned}
P' = \{&S \to X \mid Y,\\
&X \to bT \mid bX,\\
&Y \to Ta \mid Ya,\\
&T \to \varepsilon \mid bTa\}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe S8)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to \varepsilon \mid aTb\}$.

Ist G eine ε-freie Grammatik? Wenn nicht, transformieren Sie G in eine ε-freie Grammatik G'. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

- G ist nicht ϵ-frei wegen $T \to \epsilon$ und $X \to Tb$
- ϵ-Variablen $V_\epsilon = \{A \in V \mid A \to \epsilon \in P\} = \{T\}$.
- streiche ϵ-Regeln: $P' = \{S \to X \mid Y, X \to Tb \mid Xb, Y \to aT \mid aY, T \to aTb\}$.
- Füge alle $B \to xy$ für $B \to xAy \in P'$ mit $A \in V_\epsilon$, $|xy| \geq 1$ hinzu:

$$\begin{aligned} P' = \{S &\to X \mid Y, & X &\to Tb \mid Xb \mid b, \\ Y &\to aT \mid aY \mid a, & T &\to aTb \mid ab\}. \end{aligned}$$

- $G' = (V, \Sigma, P', S)$ ist die gesuchte ϵ-freie Grammatik.

Aufgabe S9)

Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort:

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$

  Typ 2, aber wegen $S \to aS$ und $S \to Sb$ nicht Typ 3
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$

  Typ 2, aber wegen $S \to SbS$ nicht Typ 3
- $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon \mid aSb, aS \to aB, B \to bB \mid b\}, S)$

  Typ 0, aber wegen $aS \to aB$ nicht Typ 2 und wegen $S \to \varepsilon \mid aSb$ nicht Typ 1
- $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$

  Typ 3

Aufgabe S10)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Für den regulären Ausdruck $\alpha = (b(ab \mid b)^*)^*(a \mid b)^*a$ gilt: $aba \in L(\alpha)$.

   wahr: $aba \in L\Big((b(ab \mid b)^*)^0(a \mid b)^2a\Big)$

2. Für die Grammatik $G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b\}, \{S \to Y,\ X \to b,\ Y \to aYYb, aY \to aZ,\ ZY \to ZX,\ Z \to a\}, S)$ gilt: $aabb \in L(G)$.

   wahr: $S \Rightarrow Y \Rightarrow aYYb \Rightarrow aZYb \Rightarrow aZXb \Rightarrow aaXb \Rightarrow aabb$

Aufgabe S11)

Sei $\Sigma_1 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprachen L_i einen regulären Ausdruck α_i mit $L_i = L(\alpha_i)$ an. Begründen Sie die von Ihnen gewählten regulären Ausdrücke α_i.

- $L_1 = \{w \in \Sigma_1^* \mid w$ beginnt mit a und $|w|_b$ ist gerade$\}$:

  $\alpha_1 = a(a^*ba^*b)^*a^*$
- $L_2 = \{w \in \Sigma_2^* \mid w$ beginnt mit a und $|w|_b$ ist gerade$\}$:

  $\alpha_2 = a((a|c)^*b(a|c)^*b)^*(a|c)^*$
- $\alpha_3 = \{w \in \Sigma_1^* \mid$ es gibt kein $u, v \in \Sigma_1^*$ mit $w = uaav\}$:

  $\alpha_3 = b^*(ab^+)^*(a|\varepsilon)$
- $L_4 = \{w \in \Sigma_2^* \mid$ es gibt kein $u, v \in \Sigma_2^*$ mit $w = uaav\}$:

  $\alpha_4 = (b|c)^*(a(b|c)^+)^*(a|\varepsilon)$

Aufgabe S14)

Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i ba^i b \mid i \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Wir nehmen an das L das Pumping-Lemma erfüllt.
Wenn das Pumping-Lemma hält, dann muss es ein $n \geq 0$ geben, sodass für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ eine Aufteilung $z = uvw$ geben sodass:

- $|v| \geq 1$,
- $|uv| \leq n$,
- $uv^k w \in L$ für jedes $k \geq 0$.

Wenn $z = a^n ba^n b$ dann können wir zeigen:
Durch die Bedingung $|uv| \leq n$ ist sicher das $uv = a^j$ für $0 \leq j \leq n$.Danach können wir mittels der Bedingung $|v| \geq 1$ zeigen das $v = a^q$ mit $1 \leq q \leq j$ ist.Dies führt zu:

$$z = a^p a^q a^r ba^n b \text{ mit } p + q + r = n \text{ und } q \geq 1$$

$uv^k w$ ist nun $a^p (a^q)^k a^r ba^n b$.Für $k = 0$ ist $a^p a^r ba^n b \notin L$, da $p + r < n$.