



Formale Systeme

11. Übungsblatt

Wintersemester 2023/24

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S19) Geben Sie eine Turingmaschine \mathcal{M}_{abc} an, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

Hinweis: Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion δ in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

Aufgabe 1

Gegeben ist die nichtdeterministische 3-Band-Turingmaschine

$$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, b, _ \}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

mit

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, _, _) &= \{(q_0, \langle a, R \rangle, \langle a, R \rangle, \langle _, N \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle a, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle _, L \rangle)\} \\ \delta(q_0, b, _, _) &= \{(q_0, \langle b, R \rangle, \langle _, N \rangle, \langle b, R \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle b, R \rangle, \langle _, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, b) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle _, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, _) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle _, L \rangle, \langle _, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, a, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle _, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, _, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle _, N \rangle, \langle _, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, _, _, _) &= \{(q_2, \langle _, N \rangle, \langle _, N \rangle, \langle _, N \rangle)\} \end{aligned}$$

Welche Sprache akzeptiert \mathcal{M} ? Hinweis: Sie können die Arbeitsweise von \mathcal{M} gerne mithilfe einer graphischen Repräsentation der Übergangsrelation δ nachvollziehen.

Aufgabe 2

Im Folgenden bezeichne \mathcal{M}_w eine deterministische Turingmaschine mit einem Band und dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, deren Codewort $\text{enc}(\mathcal{M}_w)$ gleich w ist, falls es ein solches Codewort mit $\text{enc}(\mathcal{M}_w) = w$ gibt (vgl. Vorlesung 19, Folie 15). Andernfalls ist $\mathcal{M}_w = \mathcal{M}_\perp$, eine fest gewählte deterministische Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, die für alle Eingabewörter endlos läuft.

Ist die nachfolgende Sprache entscheidbar?

$$L = \{ w \in \{0, 1, \#\}^* \mid \text{es gibt ein Wort } z \in \{0, 1, \#\}^* \text{ mit } |z| \leq |w|^2, \text{ so dass } \mathcal{M}_w \text{ das Eingabewort } z \text{ in höchstens } |z| \text{ Schritten akzeptiert} \}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Sei \mathcal{M}_w wie in Aufgabe 2 und

$$t_{\mathcal{M}_w}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Anzahl der Schritte, die } \mathcal{M}_w \text{ bei Eingabe } x \text{ durchführt.}$$

Ist die Sprache $L = \{ w \in \{0, 1\}^* \mid t_{\mathcal{M}_w}(w) > 2^{|w|} \}$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Geben Sie in den folgenden Aufgaben jeweils eine deterministische Turingmaschine mit einem oder mehreren Bändern an.

- (a) Jeweils eine DTM \mathcal{M}_{ADD} bzw. \mathcal{M}_{MULT} für die Additions- bzw. Multiplikationsfunktion

$$\begin{aligned} f_{ADD} & : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{ADD}(n, m) & = n + m \\ f_{MULT} & : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{MULT}(n, m) & = n \cdot m \end{aligned}$$

- (b) Jeweils eine DTM an für die Funktionen

$$\begin{aligned} f_{\text{fak}} & : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{\text{fak}}(n) & = n! \\ f_{\log} & : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{\log}(n) & = \begin{cases} \lfloor \log n \rfloor & \text{falls } n \geq 1 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $0! = 1$.)

Hinweise: Es genügen informelle Beschreibungen; etwa durch Skizzen, aus denen ersichtlich wird, wie (aus der Vorlesung oder Übung bekannte oder selbst definierte) Turingmaschinen miteinander verknüpft werden. Darüber hinaus können Sie die Zahlenkodierung frei entscheiden.