

# FORMALE SYSTEME

## 8. Vorlesung: Minimale Automaten

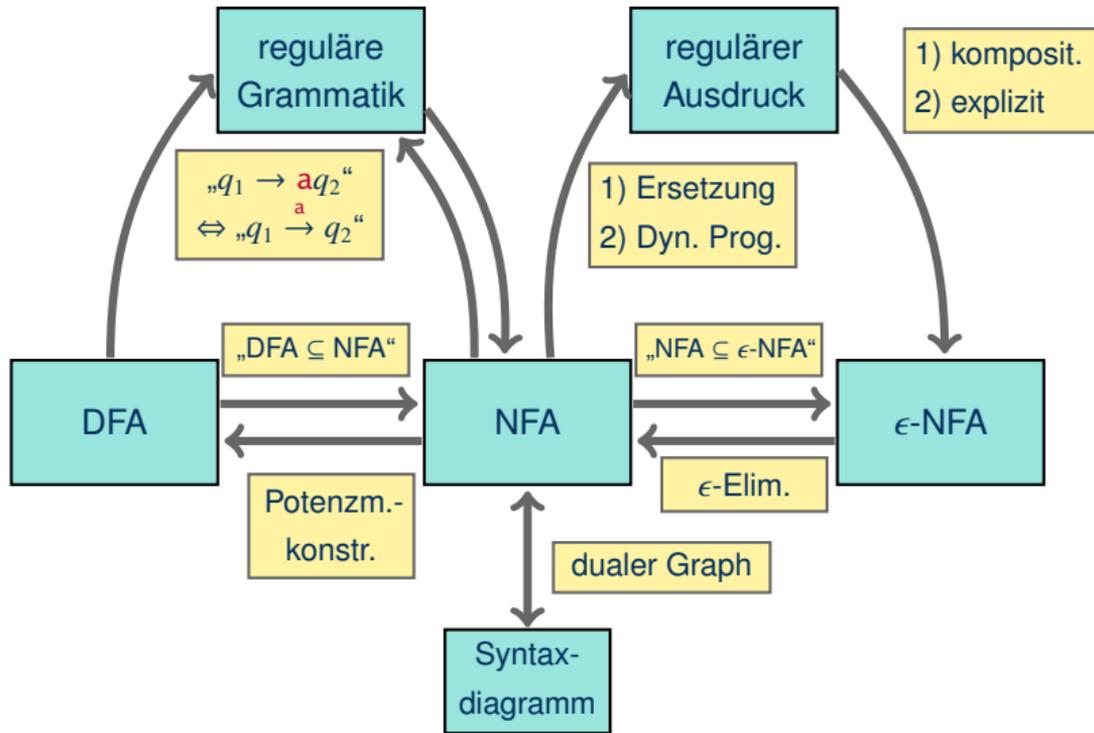
Sebastian Rudolph

Folien: © Markus Krötzsch, <https://iccl.inf.tu-dresden.de/web/FS2020>, CC BY 3.0 DE

TU Dresden, 18. November 2024

# Rückblick

# Darstellungen von Typ-3-Sprachen



# Minimierung von Automaten

# Automaten verkleinern

Wir haben bereits Methoden kennengelernt, um Automaten zu vereinfachen:

- Entfernen von Zuständen, die von keinem Anfangszustand aus erreichbar sind.
- Entfernen von Zuständen, von denen aus kein Endzustand erreicht werden kann.

Erhalten wir damit den kleinstmöglichen äquivalenten Automaten?

# Automaten verkleinern

Wir haben bereits Methoden kennengelernt, um Automaten zu vereinfachen:

- Entfernen von Zuständen, die von keinem Anfangszustand aus erreichbar sind.
- Entfernen von Zuständen, von denen aus kein Endzustand erreicht werden kann.

Erhalten wir damit den kleinstmöglichen äquivalenten Automaten?

**Nein** – ein einfaches Gegenbeispiel:

Beispiel: Sei  $\mathcal{M}$  ein endlicher Automat, bei dem alle Zustände erreichbar sind und einen Endzustand erreichen können. Der Vereinigungsautomat<sup>a</sup>  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$  akzeptiert die selbe Sprache, hat nur erreichbare Zustände, aber die doppelte Zustandszahl.

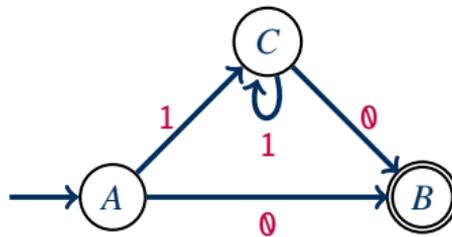
---

<sup>a</sup>Hierbei müssen die Zustände einer Kopie von  $\mathcal{M}$  umbenannt werden.

# Ein interessanteres Beispiel

Der Vereinigungsautomat ist immer ein NFA. Nichtdeterminismus macht es einfach, nichtminimale Automaten zu finden.

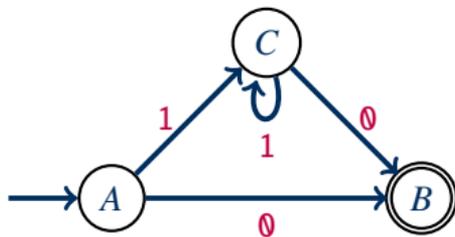
Interessanter sind nichtminimale DFAs:



## Ein interessanteres Beispiel

Der Vereinigungsautomat ist immer ein NFA. Nichtdeterminismus macht es einfach, nichtminimale Automaten zu finden.

Interessanter sind nichtminimale DFAs:



Dieser DFA hat keine offensichtlich überflüssigen Zustände, aber der folgende kleinere DFA erkennt die selbe Sprache  $1^*0$ :



# Automaten minimieren?

Wie kann man Automaten weiter minimieren?

## **Beobachtungen:**

- Zur Erkennung von Wörtern muss der Automat nur seinen aktuellen Zustand kennen.
- Wichtig ist, wohin man vom aktuellen Zustand aus gelangt, wenn man das restliche Wort einliest.
- Es ist nicht relevant, auf welchem Weg man zu diesem Zustand gelangt ist.

# Automaten minimieren?

Wie kann man Automaten weiter minimieren?

## Beobachtungen:

- Zur Erkennung von Wörtern muss der Automat nur seinen aktuellen Zustand kennen.
- Wichtig ist, wohin man vom aktuellen Zustand aus gelangt, wenn man das restliche Wort einliest.
- Es ist nicht relevant, auf welchem Weg man zu diesem Zustand gelangt ist.

**Idee:** Zwei Zustände sind gleichwertig, wenn man ausgehend von beiden Zuständen die selbe Sprache akzeptieren kann.

**Ansatz zur Minimierung:** Gleichwertige Zustände könnten verschmolzen werden . . .

# Äquivalenz von Zuständen

Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  und einen Zustand  $q \in Q$  sei  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$  der abgewandelte DFA mit Startzustand  $q$ .

Zwei Zustände  $p, q \in Q$  sind genau dann  **$\mathcal{M}$ -äquivalent**, in Symbolen  $p \sim_{\mathcal{M}} q$ , wenn gilt:

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$$

- Also gilt  $p \sim_{\mathcal{M}} q$  genau dann, wenn für jedes  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $\delta(p, w) \in F$  gdw.  $\delta(q, w) \in F$ .
- Wenn der Automat  $\mathcal{M}$  klar ist, schreiben wir einfach  $\sim$  statt  $\sim_{\mathcal{M}}$ .

# Äquivalenz von Zuständen

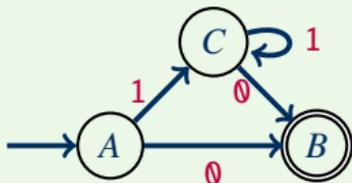
Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  und einen Zustand  $q \in Q$  sei  $\mathcal{M}_q = \langle Q, \Sigma, \delta, q, F \rangle$  der abgewandelte DFA mit Startzustand  $q$ .

Zwei Zustände  $p, q \in Q$  sind genau dann  **$\mathcal{M}$ -äquivalent**, in Symbolen  $p \sim_{\mathcal{M}} q$ , wenn gilt:

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$$

- Also gilt  $p \sim_{\mathcal{M}} q$  genau dann, wenn für jedes  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $\delta(p, w) \in F$  gdw.  $\delta(q, w) \in F$ .
- Wenn der Automat  $\mathcal{M}$  klar ist, schreiben wir einfach  $\sim$  statt  $\sim_{\mathcal{M}}$ .

Beispiel:



$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_A) = \{1\}^* \{0\} = \mathbf{L}(\mathcal{M}_C)$$

$$\mathbf{L}(\mathcal{M}_B) = \{\epsilon\}$$

$$\rightsquigarrow A \sim C$$

## Eigenschaften von $\sim_{\mathcal{M}}$

**Definition (kurz):** Es gilt  $q \sim_{\mathcal{M}} p$  genau dann, wenn  $\mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ .

# Eigenschaften von $\sim_{\mathcal{M}}$

**Definition (kurz):** Es gilt  $q \sim_{\mathcal{M}} p$  genau dann, wenn  $\mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ .

Damit sehen wir leicht (jeweils für alle  $q, q_1, q_2, q_3 \in Q$ ):

- $\sim$  ist **reflexiv**: Es gilt  $q \sim q$ .
- $\sim$  ist **symmetrisch**: Aus  $q_1 \sim q_2$  folgt stets  $q_2 \sim q_1$ .
- $\sim$  ist **transitiv**: Wenn  $q_1 \sim q_2$  und  $q_2 \sim q_3$ , dann auch  $q_1 \sim q_3$ .

Eigenschaft:  $\sim$  ist eine **Äquivalenzrelation**.

# Eigenschaften von $\sim_{\mathcal{M}}$

**Definition (kurz):** Es gilt  $q \sim_{\mathcal{M}} p$  genau dann, wenn  $\mathbf{L}(\mathcal{M}_p) = \mathbf{L}(\mathcal{M}_q)$ .

Damit sehen wir leicht (jeweils für alle  $q, q_1, q_2, q_3 \in Q$ ):

- $\sim$  ist **reflexiv**: Es gilt  $q \sim q$ .
- $\sim$  ist **symmetrisch**: Aus  $q_1 \sim q_2$  folgt stets  $q_2 \sim q_1$ .
- $\sim$  ist **transitiv**: Wenn  $q_1 \sim q_2$  und  $q_2 \sim q_3$ , dann auch  $q_1 \sim q_3$ .

Eigenschaft:  $\sim$  ist eine **Äquivalenzrelation**.

Außerdem gilt für alle  $\mathbf{a} \in \Sigma$ :

- Wenn  $q_1 \sim q_2$ , dann gilt auch  $\delta(q_1, \mathbf{a}) \sim \delta(q_2, \mathbf{a})$ , falls diese Übergänge definiert sind.

(Daher nehmen wir im Folgenden oft eine totale Übergangsfunktion an.)

Eigenschaft:  $\sim$  ist **verträglich** mit der Übergangsfunktion.

# Notation für Äquivalenzrelationen

Wir verwenden die bei Äquivalenzen üblichen Begriffe und Notationen:

Wir schreiben  $[q]_{\sim}$  für die  $\sim$ -Äquivalenzklasse von  $q$ , d.h.

$$[q]_{\sim} = \{p \in Q \mid q \sim p\}.$$

Für eine Menge  $P \subseteq Q$  schreiben wir  $P/\sim$  für den Quotienten von  $P$  und  $\sim$ :

$$P/\sim = \{[p]_{\sim} \mid p \in P\}.$$

(Die Quotientenbildung heißt Faktorisierung; sie entspricht dem „Verschmelzen“ äquivalenter Zustände.)

Wie immer gilt (für alle  $q_1, q_2 \in Q$ ):

- Aus  $q_1 \sim q_2$  folgt stets  $[q_1]_{\sim} = [q_2]_{\sim}$ .
- Unterschiedliche Äquivalenzklassen sind disjunkt:

$$[q_1]_{\sim} \neq [q_2]_{\sim} \text{ impliziert } [q_1]_{\sim} \cap [q_2]_{\sim} = \emptyset$$

- Die Äquivalenzklassen partitionieren  $Q$ :

$$Q = \bigcup_{q \in Q} [q]_{\sim}$$

# Der Quotientenautomat

Wir vereinfachen Automaten, indem wir äquivalente Zustände verschmelzen:

Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit totaler Übergangsfunktion ist der **Quotientenautomat**  $\mathcal{M}/\sim$  gegeben durch  $\mathcal{M}/\sim = \langle Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_{\sim\mathcal{M}}, F/\sim \rangle$ , wobei gilt:

- $Q/\sim = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $\delta_\sim([q]_\sim, \mathbf{a}) = [\delta(q, \mathbf{a})]_\sim$
- $F/\sim = \{[q]_\sim \mid q \in F\}$

# Der Quotientenautomat

Wir vereinfachen Automaten, indem wir äquivalente Zustände verschmelzen:

Für einen DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  mit totaler Übergangsfunktion ist der **Quotientenautomat**  $\mathcal{M}/\sim$  gegeben durch  $\mathcal{M}/\sim = \langle Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_{\sim_{\mathcal{M}}}, F/\sim \rangle$ , wobei gilt:

- $Q/\sim = \{[q]_\sim \mid q \in Q\}$
- $\delta_\sim([q]_\sim, \mathbf{a}) = [\delta(q, \mathbf{a})]_\sim$
- $F/\sim = \{[q]_\sim \mid q \in F\}$

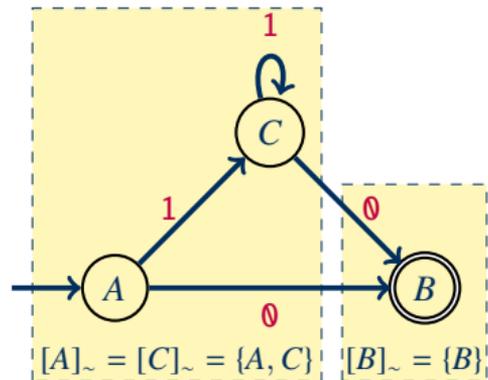
Der Quotientenautomat  $\mathcal{M}/\sim$  ist wohldefiniert, da gilt:

- Wenn  $[q]_\sim = [p]_\sim$ , dann ist auch  $[\delta(q, \mathbf{a})]_{\sim_{\mathcal{M}}} = [\delta(p, \mathbf{a})]_{\sim_{\mathcal{M}}}$ .  
(Verträglichkeit von  $\sim$  und  $\delta$ ; benötigt totale Übergangsfunktion.)
- Aus  $[q]_\sim = [p]_\sim$  folgt stets:  $q \in F$  gdw.  $p \in F$ .

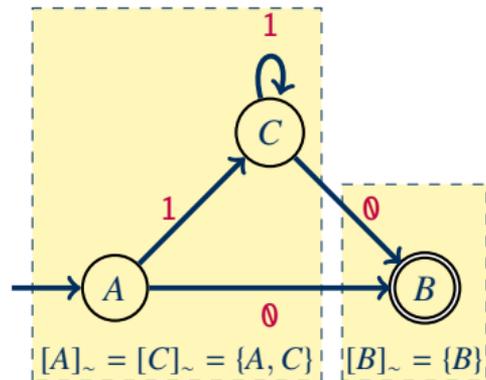
(♠, Übung)

$\rightsquigarrow$  Die Definition ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten von  $[q]_\sim$ .

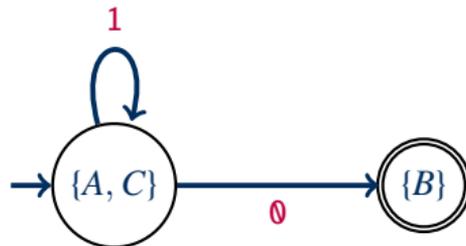
# Beispiel



# Beispiel



Es ergibt sich der folgende Quotientenautomat:



# Korrektheit Quotientenautomat

**Satz:** Für jeden totalen DFA  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$ .

**Beweis:** Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}) \quad \text{gdw.} \quad \delta(q_0, w) \in F \quad (\text{Definition von } \mathbf{L}(\mathcal{M}))$$

# Korrektheit Quotientenautomat

**Satz:** Für jeden totalen DFA  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$ .

**Beweis:** Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$  gdw.  $\delta(q_0, w) \in F$  (Definition von  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ )  
gdw.  $[\delta(q_0, w)]_{\sim} \in F/\sim$  ( $\spadesuit$ , Übung)

# Korrektheit Quotientenautomat

**Satz:** Für jeden totalen DFA  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$ .

**Beweis:** Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$  gdw.  $\delta(q_0, w) \in F$  (Definition von  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ )

gdw.  $[\delta(q_0, w)]_{\sim} \in F/\sim$  ( $\spadesuit$ , Übung)

gdw.  $\delta_{\sim}([q_0]_{\sim}, w) \in F/\sim$  (Lemma  $\heartsuit$ )

# Korrektheit Quotientenautomat

**Satz:** Für jeden totalen DFA  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$ .

**Beweis:** Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$w \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$  gdw.  $\delta(q_0, w) \in F$  (Definition von  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ )  
gdw.  $[\delta(q_0, w)]_{\sim} \in F/\sim$  ( $\spadesuit$ , Übung)  
gdw.  $\delta_{\sim}([q_0]_{\sim}, w) \in F/\sim$  (Lemma  $\heartsuit$ )  
gdw.  $w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$  (Definition von  $\mathcal{M}/\sim$ )

# Korrektheit Quotientenautomat

**Satz:** Für jeden totalen DFA  $\mathcal{M}$  gilt  $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim)$ .

**Beweis:** Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$$\begin{aligned}w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}) & \text{ gdw. } \delta(q_0, w) \in F && \text{(Definition von } \mathbf{L}(\mathcal{M})\text{)} \\ & \text{ gdw. } [\delta(q_0, w)]_{\sim} \in F/\sim && (\spadesuit, \text{ Übung)} \\ & \text{ gdw. } \delta_{\sim}([q_0]_{\sim}, w) \in F/\sim && \text{(Lemma } \heartsuit\text{)} \\ & \text{ gdw. } w \in \mathbf{L}(\mathcal{M}/\sim) && \text{(Definition von } \mathcal{M}/\sim\text{)}\end{aligned}$$

**Lemma  $\heartsuit$ :** Für beliebige  $q \in Q$  und  $w \in \Sigma^*$  gilt:

$$[\delta(q, w)]_{\sim} = \delta_{\sim}([q]_{\sim}, w).$$

Beweis durch Induktion über  $|w|$ . (Übung)

□

# Berechnung von $\sim_{\mathcal{M}}$

Wie kann man  $\sim_{\mathcal{M}}$  praktisch ermitteln?

Zuvor bemerkten wir:

- (1) Aus  $q_1 \sim q_2$  folgt stets:  $q_1 \in F$  gdw.  $q_2 \in F$ .
- (2) Wenn  $q_1 \sim q_2$ , dann auch  $\delta(q_1, \mathbf{a}) \sim \delta(q_2, \mathbf{a})$ .

Umgekehrt gilt also:

- (1') Aus  $q_1 \in F$  und  $q_2 \notin F$  folgt immer  $q_1 \not\sim q_2$ .
- (2') Wenn  $\delta(q_1, \mathbf{a}) \not\sim \delta(q_2, \mathbf{a})$ , dann  $q_1 \not\sim q_2$ .

Tatsächlich ist  $\not\sim$  die kleinste Relation, die (1') und (2') erfüllt.

$\leadsto$  Wir können  $\not\sim$  (und damit auch  $\sim$ ) durch rekursive Anwendung der Regeln (1') und (2') berechnen.

# Algorithmus zur Berechnung von $\sim_{\mathcal{M}}$

**Eingabe:** DFA  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

**Ausgabe:**  $\sim_{\mathcal{M}}$

- Initialisiere  $\sim := \emptyset$
- (Regel 1) Für jedes Paar von Zuständen  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q$ :  
Falls  $q \in F$  und  $p \notin F$ , dann „speichere  $q \sim p$ “.
- (Regel 2) Für jedes Paar  $\langle q, p \rangle \in Q \times Q \setminus \sim$  und jedes  $a \in \Sigma$ :  
Falls  $\delta(q, a) \sim \delta(p, a)$  dann „speichere  $q \sim p$ “.
- Wiederhole die Anwendung von Regel 2 solange, bis es keine Änderungen mehr gibt.
- Das Ergebnis ist  $(Q \times Q) \setminus \sim$ .

# Darstellung von $\neq$ im Algorithmus

Die Anweisung „speichere  $q \neq p$ “ könnte umgesetzt werden als:

$$\neq := \neq \cup \{\langle q, p \rangle, \langle p, q \rangle\}$$

Es ist aber nicht nötig, alle Paare in  $\neq$  einzeln zu speichern:

- $\neq$  ist irreflexiv, man muss also  $q \neq q$  nicht betrachten;
- $\neq$  ist symmetrisch, d.h. man muss jeweils nur entweder  $q \neq p$  oder  $p \neq q$  betrachten.

# Darstellung von $\neq$ im Algorithmus

Die Anweisung „speichere  $q \neq p$ “ könnte umgesetzt werden als:

$$\neq := \neq \cup \{\langle q, p \rangle, \langle p, q \rangle\}$$

Es ist aber nicht nötig, alle Paare in  $\neq$  einzeln zu speichern:

- $\neq$  ist irreflexiv, man muss also  $q \neq q$  nicht betrachten;
- $\neq$  ist symmetrisch, d.h. man muss jeweils nur entweder  $q \neq p$  oder  $p \neq q$  betrachten.

→ Eine Halb-Tabelle genügt zum Eintragen der möglichen Paare.

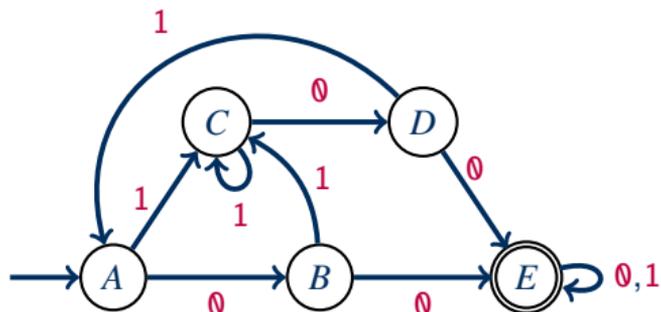
Beispiel: Für einen DFA mit 5 Zuständen  
 $Q = \{A, B, C, D, E\}$  genügt eine Tabelle mit  
zehn Feldern.

(Statt  $5^2 = 25$  also nur noch  $(5^2 - 5)/2 = 10$ ).

(Dazu reihen wir Zustände vertikal in umgekehrter Reihenfolge.)

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



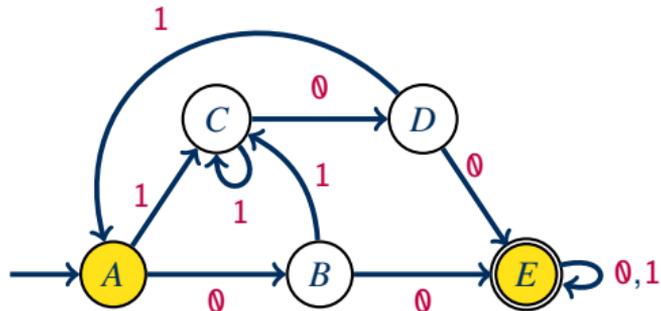
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E				
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



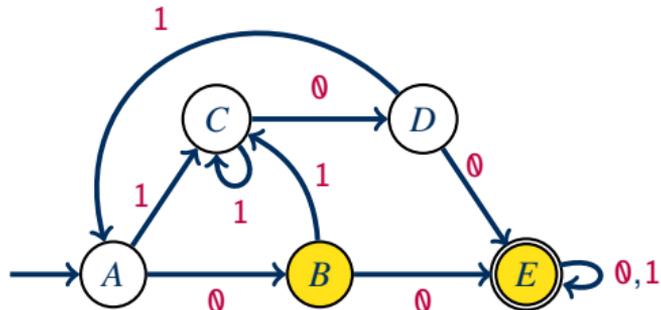
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	€			
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



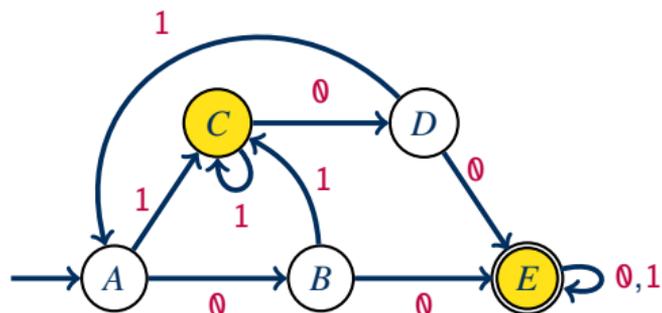
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$		
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



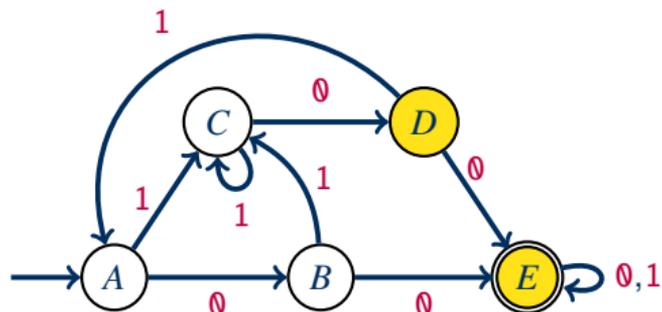
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	ε	ε	ε	
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



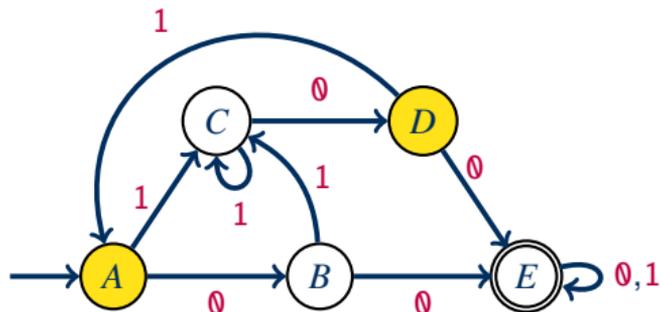
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	€	€	€	€
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



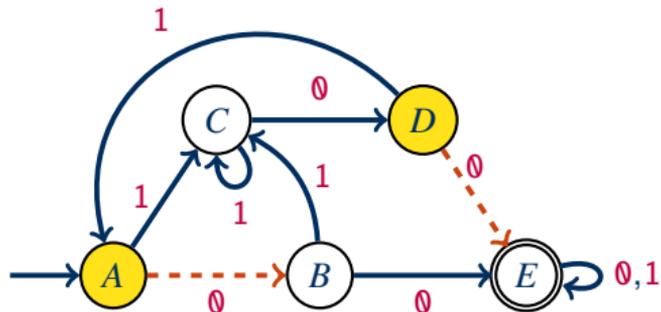
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	ε	ε	ε	ε
D				
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



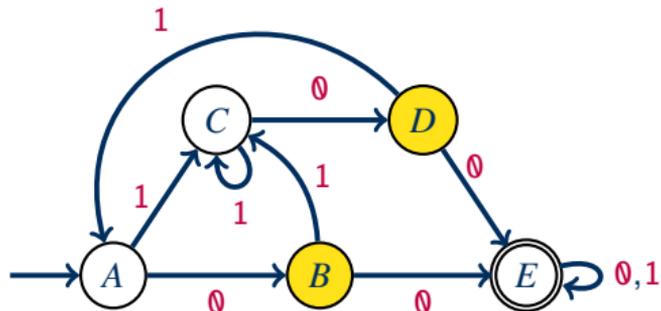
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	€	€	€	€
D	0			
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



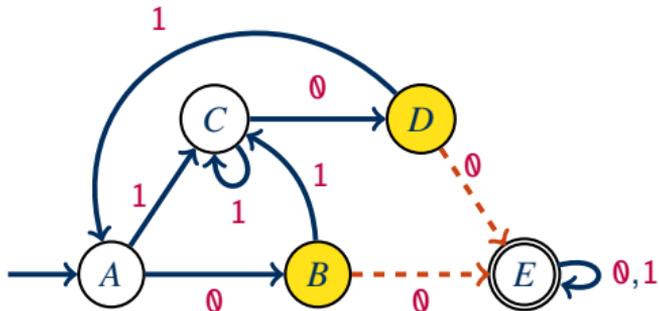
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0			
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



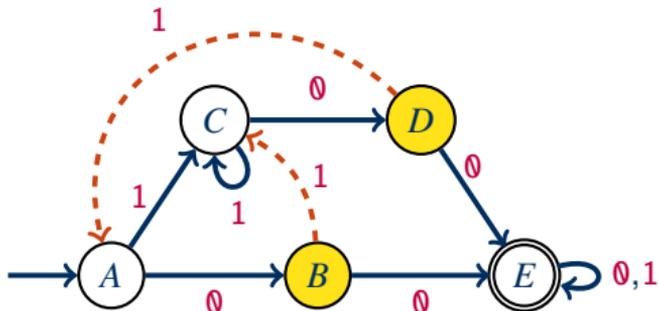
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0			
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



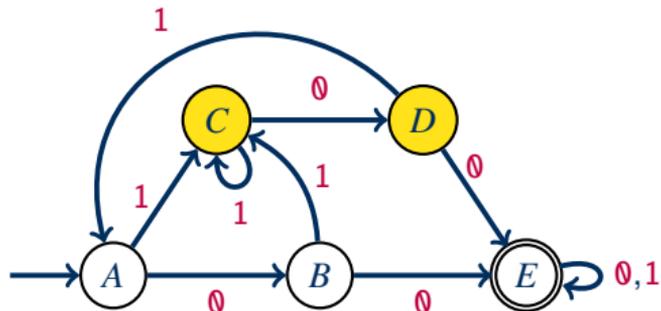
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	ε	ε	ε	ε
D	0			
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



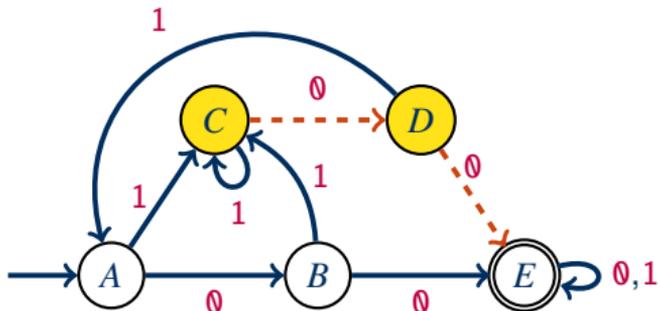
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0			
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



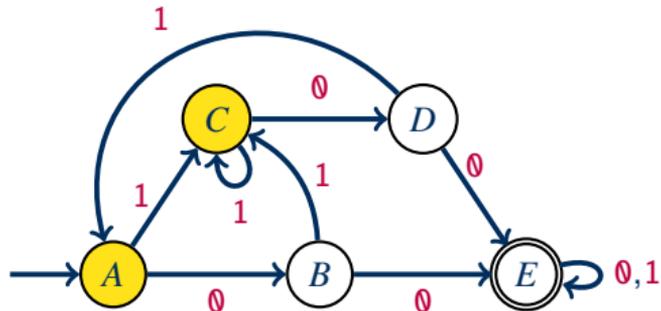
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	ε	ε	ε	ε
D	0		0	
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



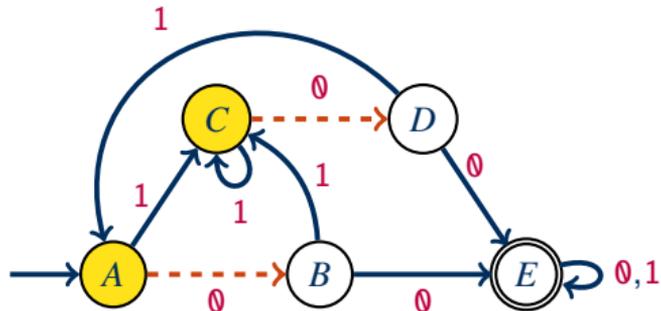
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0		0	
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



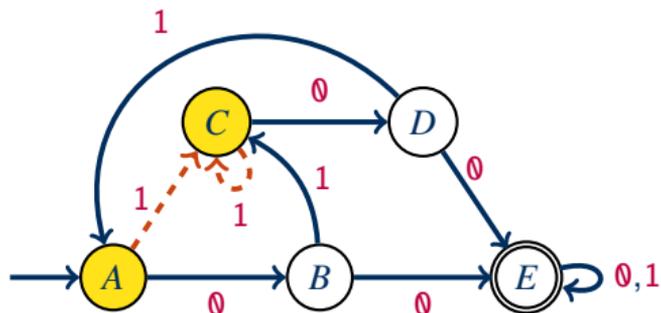
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0		0	
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



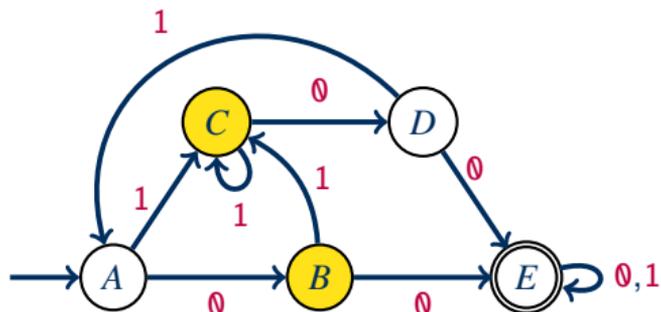
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0		0	
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



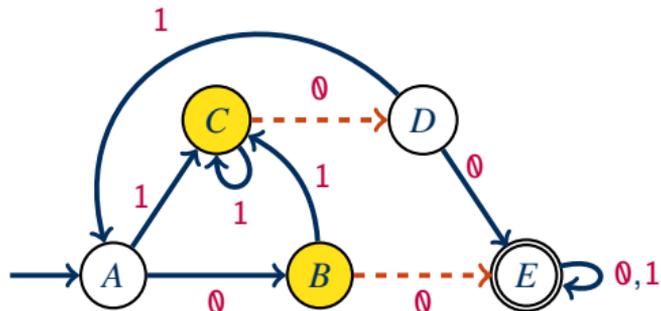
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0		0	
C				
B				

# Beispiel Quotientenautomat



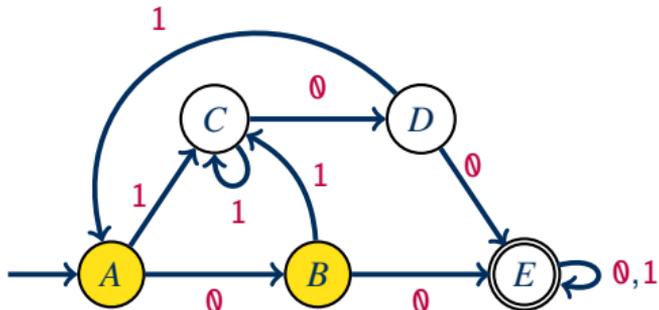
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	€	€	€	€
D	0		0	
C		0		
B				

# Beispiel Quotientenautomat



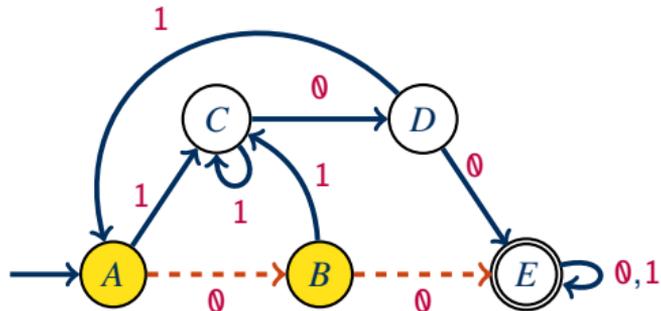
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	€	€	€	€
D	0		0	
C		0		
B				

# Beispiel Quotientenautomat



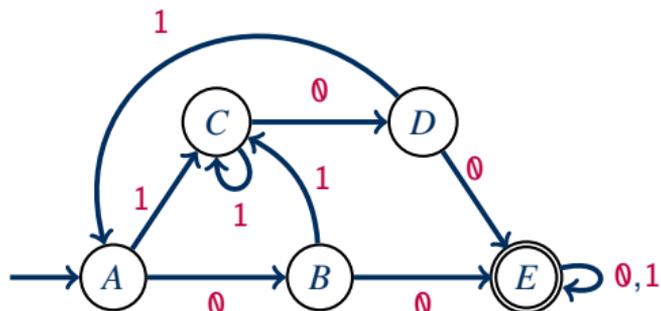
(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	ε	ε	ε	ε
D	0		0	
C		0		
B	0			

# Beispiel Quotientenautomat



(1)  $q \in F$  und  $p \notin F$  impliziert  $q \neq p$ .

(2)  $\delta(q, a) \neq \delta(p, a)$  impliziert  $q \neq p$ .

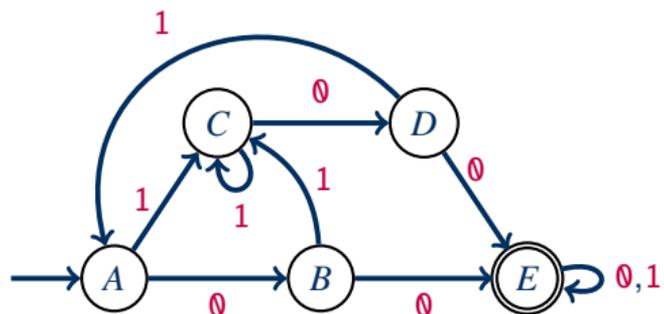
Wir tragen in der Tabelle jeweils die Wörter ein, die  $q \neq p$  zeigen:

	A	B	C	D
E	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$	$\epsilon$
D	0		0	
C		0		
B	0			

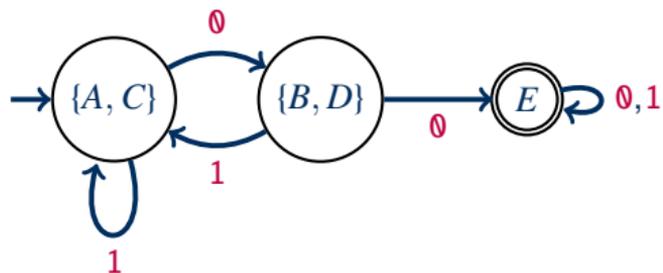
Weitere Abarbeitung von Regel (2) führt nicht mehr zu Änderungen. Es folgt:

$\sim = \{\langle B, D \rangle, \langle D, B \rangle, \langle A, C \rangle, \langle C, A \rangle\} \cup \{\langle q, q \rangle \mid q \in Q\}$ , also  
 $Q/\sim = \{\{A, C\}, \{B, D\}, \{E\}\}$ .

# Beispiel Quotientenautomat



Quotientenautomat:



# Quiz: Quotientenautomat

**Quiz:** Sei  $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  ein DFA mit totaler Übergangsfunktion.

...

# Reduktion von Automaten

Wir können das bisher gezeigte zusammenfassen:

Sei  $\mathcal{M}$  ein DFA mit totaler Übergangsfunktion. Der **reduzierte Automat  $\mathcal{M}_r$** , ergibt sich durch folgende Schritte:

- (1) Entferne alle unerreichbaren Zustände aus  $\mathcal{M}$ .
- (2) Berechne den Quotientenautomaten.

# Reduktion von Automaten

Wir können das bisher gezeigte zusammenfassen:

Sei  $\mathcal{M}$  ein DFA mit totaler Übergangsfunktion. Der **reduzierte Automat  $\mathcal{M}_r$** , ergibt sich durch folgende Schritte:

- (1) Entferne alle unerreichbaren Zustände aus  $\mathcal{M}$ .
- (2) Berechne den Quotientenautomaten.

Dieses Verfahren erzeugt den gewünschten minimalen DFA:

**Satz:**  $\mathcal{M}_r$  ist bezüglich der Zustandsmenge der minimale DFA mit totaler Übergangsfunktion, der die Sprache  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$  erkennt.

# Reduktion von Automaten

Wir können das bisher gezeigte zusammenfassen:

Sei  $\mathcal{M}$  ein DFA mit totaler Übergangsfunktion. Der **reduzierte Automat**  $\mathcal{M}_r$  ergibt sich durch folgende Schritte:

- (1) Entferne alle unerreichbaren Zustände aus  $\mathcal{M}$ .
- (2) Berechne den Quotientenautomaten.

Dieses Verfahren erzeugt den gewünschten minimalen DFA:

**Satz:**  $\mathcal{M}_r$  ist bezüglich der Zustandsmenge der minimale DFA mit totaler Übergangsfunktion, der die Sprache  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$  erkennt.

Zudem stellt sich heraus, dass dieser minimale DFA eindeutig ist:

**Satz:** Alle minimalen DFA mit totaler Übergangsfunktion, die  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$  erkennen, sind bis auf Umbenennung von Zuständen gleich (sie sind **isomorph**). Daher hängt  $\mathcal{M}_r$  nur von  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$  ab, nicht von  $\mathcal{M}$ .

# Korrektheit Minimalautomat

**Satz:**  $\mathcal{M}_r$  ist bezüglich der Zustandsmenge der minimale DFA mit totaler Übergangsfunktion, der die Sprache  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$  erkennt.

## Beweisplan:

1.  $\mathcal{M}_r$  erkennt  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ : Dies folgt aus der Korrektheit der Quotientenbildung bei Automaten.
2.  $\mathcal{M}_r$  ist minimal für diese Eigenschaft: Wir werden dies in mehreren Schritten zeigen:
  - Wir konstruieren einen weiteren minimalen Automaten  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}$  direkt aus  $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ .
  - Wir zeigen, dass  $\mathcal{M}_{\mathbf{L}}$  und  $\mathcal{M}_r$  bis auf Umbenennung von Zuständen gleich sind.

Damit ist auch die behauptete Eindeutigkeit gezeigt.

# Die Nerode-Rechtskongruenz

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist die **Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_L$  wie folgt definiert.

Für Wörter  $u, v \in \Sigma^*$  sei  $u \simeq_L v$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $uw \in L$  genau dann, wenn  $vw \in L$ .

Wenn  $L$  klar ist, dann schreiben wir einfach  $\simeq$  statt  $\simeq_L$

# Die Nerode-Rechtskongruenz

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist die **Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_L$  wie folgt definiert.

Für Wörter  $u, v \in \Sigma^*$  sei  $u \simeq_L v$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $uw \in L$  genau dann, wenn  $vw \in L$ .

Wenn  $L$  klar ist, dann schreiben wir einfach  $\simeq$  statt  $\simeq_L$

**Also:** Für  $u, v \in \Sigma^*$  gilt  $u \simeq_L v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

(1) Ist  $uw \in L$ , dann auch  $vw \in L$ ; und (2) Ist  $uw \notin L$ , dann auch  $vw \notin L$ .

# Die Nerode-Rechtskongruenz

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist die **Nerode-Rechtskongruenz**  $\approx_L$  wie folgt definiert.

Für Wörter  $u, v \in \Sigma^*$  sei  $u \approx_L v$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $uw \in L$  genau dann, wenn  $vw \in L$ .

Wenn  $L$  klar ist, dann schreiben wir einfach  $\approx$  statt  $\approx_L$

**Also:** Für  $u, v \in \Sigma^*$  gilt  $u \approx_L v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

(1) Ist  $uw \in L$ , dann auch  $vw \in L$ ; und (2) Ist  $uw \notin L$ , dann auch  $vw \notin L$ .

**Anders gesagt:** Zwei Wörter  $v$  und  $u$  sind kongruent, wenn man in jedem Wort das Präfix  $v$  gegen  $u$  vertauschen kann, ohne dass dies den Status des Worts bezüglich  $L$  verändert.

# Die Nerode-Rechtskongruenz

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist die **Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_L$  wie folgt definiert.

Für Wörter  $u, v \in \Sigma^*$  sei  $u \simeq_L v$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $uw \in L$  genau dann, wenn  $vw \in L$ .

Wenn  $L$  klar ist, dann schreiben wir einfach  $\simeq$  statt  $\simeq_L$

**Also:** Für  $u, v \in \Sigma^*$  gilt  $u \simeq_L v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

(1) Ist  $uw \in L$ , dann auch  $vw \in L$ ; und (2) Ist  $uw \notin L$ , dann auch  $vw \notin L$ .

**Anders gesagt:** Zwei Wörter  $v$  und  $u$  sind kongruent, wenn man in jedem Wort das Präfix  $v$  gegen  $u$  vertauschen kann, ohne dass dies den Status des Worts bezüglich  $L$  verändert.

**Anders gesagt:** Zwei Wörter  $u$  und  $v$  sind **nicht** kongruent, wenn es ein Wort  $w \in \Sigma^*$  gibt, sodass  $|\{uw, vw\} \cap L| = 1$  gilt.

# Die Nerode-Rechtskongruenz

Für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  ist die **Nerode-Rechtskongruenz**  $\simeq_L$  wie folgt definiert.

Für Wörter  $u, v \in \Sigma^*$  sei  $u \simeq_L v$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $uw \in L$  genau dann, wenn  $vw \in L$ .

Wenn  $L$  klar ist, dann schreiben wir einfach  $\simeq$  statt  $\simeq_L$

**Also:** Für  $u, v \in \Sigma^*$  gilt  $u \simeq_L v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:

(1) Ist  $uw \in L$ , dann auch  $vw \in L$ ; und (2) Ist  $uw \notin L$ , dann auch  $vw \notin L$ .

**Anders gesagt:** Zwei Wörter  $v$  und  $u$  sind kongruent, wenn man in jedem Wort das Präfix  $v$  gegen  $u$  vertauschen kann, ohne dass dies den Status des Worts bezüglich  $L$  verändert.

**Anders gesagt:** Zwei Wörter  $u$  und  $v$  sind **nicht** kongruent, wenn es ein Wort  $w \in \Sigma^*$  gibt, sodass  $|\{uw, vw\} \cap L| = 1$  gilt.

Dies kann mit der Idee der Zustandsäquivalenz verglichen werden:

(Rückblick) Für Zustände  $p, q \in Q$  sei  $p \sim q$  genau dann, wenn gilt:

Für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt  $\delta(p, w) \in F$  genau dann, wenn  $\delta(q, w) \in F$ .

# Eigenschaften von $\simeq$

**Definition (kurz):**  $u \simeq_{\mathbf{L}} v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $uw \in \mathbf{L}$  gdw.  $vw \in \mathbf{L}$ .

# Eigenschaften von $\simeq$

**Definition (kurz):**  $u \simeq_{\mathbf{L}} v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $uw \in \mathbf{L}$  gdw.  $vw \in \mathbf{L}$ .

Damit sehen wir leicht (jeweils für alle  $u, v, w \in \Sigma^*$ ):

- $\simeq$  ist **reflexiv**:  $u \simeq u$
- $\simeq$  ist **symmetrisch**: Aus  $u \simeq v$  folgt stets  $v \simeq u$ .
- $\simeq$  ist **transitiv**: Wenn  $u \simeq v$  und  $v \simeq w$ , dann auch  $u \simeq w$ .

Eigenschaft:  $\simeq$  ist eine **Äquivalenzrelation**.

# Eigenschaften von $\simeq$

**Definition (kurz):**  $u \simeq_{\mathbf{L}} v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $uw \in \mathbf{L}$  gdw.  $vw \in \mathbf{L}$ .

Damit sehen wir leicht (jeweils für alle  $u, v, w \in \Sigma^*$ ):

- $\simeq$  ist **reflexiv**:  $u \simeq u$
- $\simeq$  ist **symmetrisch**: Aus  $u \simeq v$  folgt stets  $v \simeq u$ .
- $\simeq$  ist **transitiv**: Wenn  $u \simeq v$  und  $v \simeq w$ , dann auch  $u \simeq w$ .

Eigenschaft:  $\simeq$  ist eine **Äquivalenzrelation**.

Außerdem gilt für alle  $w \in \Sigma^*$ :

- $u \simeq v$  impliziert  $uw \simeq vw$ .

Eigenschaft:  $\simeq$  ist **verträglich mit der Konkatenation von rechts**.

Dies rechtfertigt die Bezeichnung **Rechtskongruenz**.

# Beispiele

Die Sprache  $L = \{a\}^*\{b\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .

# Beispiele

Die Sprache  $L = \{a\}^*\{b\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{a\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in L$  gdw.  $w \in L$ .
- $[b]_{\approx} = \{a\}^*\{b\}^+$ : Für jedes  $v \in [b]_{\approx}$  ist  $vw \in L$  gdw.  $w \in \{b\}^*$ .
- $[ba]_{\approx} = \Sigma^* \setminus L$ : Für jedes  $v \in [ba]_{\approx}$  ist  $vw \notin L$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\simeq} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\simeq}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\simeq} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\simeq}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\simeq} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\simeq}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\epsilon, \mathbf{b}\}$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\epsilon, \mathbf{b}\}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{b}\}$ :  $\mathbf{b}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w = \mathbf{a}$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\epsilon, \mathbf{b}\}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{b}\}$ :  $\mathbf{b}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w = \mathbf{a}$ .
- $[\mathbf{ab}]_{\approx} = \{\mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$ : für jedes  $v \in [\mathbf{ab}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w = \epsilon$ .

# Beispiele

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^*$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*$ : Für jedes  $v \in [\epsilon]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}^*\{\mathbf{b}\}^+$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{b}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{b}\}^*$ .
- $[\mathbf{ba}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \mathbf{L}$ : Für jedes  $v \in [\mathbf{ba}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

Die endliche Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$ .
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\epsilon, \mathbf{b}\}$ .
- $[\mathbf{b}]_{\approx} = \{\mathbf{b}\}$ :  $\mathbf{b}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w = \mathbf{a}$ .
- $[\mathbf{ab}]_{\approx} = \{\mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$ : für jedes  $v \in [\mathbf{ab}]_{\approx}$  ist  $vw \in \mathbf{L}$  gdw.  $w = \epsilon$ .
- $[\mathbf{bb}]_{\approx} = \Sigma^* \setminus \{\epsilon, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}\}$ : für jedes  $v \in [\mathbf{bb}]_{\approx}$  ist  $vw \notin \mathbf{L}$  für alle  $w \in \Sigma^*$ .

## Beispiel (2)

Die Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aa}]_{\approx} = \{\mathbf{aa}\}$ :  $\mathbf{aa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+2} \mid n \geq 0\}$

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aa}]_{\approx} = \{\mathbf{aa}\}$ :  $\mathbf{aa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^{n+2} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aaa}]_{\approx} = \{\mathbf{aaa}\}$ :  $\mathbf{aaa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n \mathbf{b}^{n+3} \mid n \geq 0\}$

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aa}]_{\approx} = \{\mathbf{aa}\}$ :  $\mathbf{aa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+2} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aaa}]_{\approx} = \{\mathbf{aaa}\}$ :  $\mathbf{aaa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+3} \mid n \geq 0\}$
- ... unendlich viele Äquivalenzklassen  $[\mathbf{a}^n]_{\approx} = \{\mathbf{a}^n\}$

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aa}]_{\approx} = \{\mathbf{aa}\}$ :  $\mathbf{aa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+2} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aaa}]_{\approx} = \{\mathbf{aaa}\}$ :  $\mathbf{aaa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+3} \mid n \geq 0\}$
- ... unendlich viele Äquivalenzklassen  $[\mathbf{a}^n]_{\approx} = \{\mathbf{a}^n\}$

Es gibt weitere Formen von Äquivalenzklassen, z.B.  $[\mathbf{aab}]_{\approx} = \{\mathbf{a}^{n+1}\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$ .

## Beispiel (2)

Die Sprache  $\mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat die folgenden Nerode-Äquivalenzklassen:

- $[\epsilon]_{\approx} = \{\epsilon\}$ :  $\epsilon w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \mathbf{L}$
- $[\mathbf{a}]_{\approx} = \{\mathbf{a}\}$ :  $\mathbf{a}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+1} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aa}]_{\approx} = \{\mathbf{aa}\}$ :  $\mathbf{aa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+2} \mid n \geq 0\}$
- $[\mathbf{aaa}]_{\approx} = \{\mathbf{aaa}\}$ :  $\mathbf{aaa}w \in \mathbf{L}$  gdw.  $w \in \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^{n+3} \mid n \geq 0\}$
- ... unendlich viele Äquivalenzklassen  $[\mathbf{a}^n]_{\approx} = \{\mathbf{a}^n\}$

Es gibt weitere Formen von Äquivalenzklassen, z.B.  $[\mathbf{aab}]_{\approx} = \{\mathbf{a}^{n+1}\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$ .

$\leadsto \mathbf{L} = \{\mathbf{a}^n\mathbf{b}^n \mid n \geq 0\}$  hat unendlich viele Nerode-Äquivalenzklassen.

# Quiz: Nerode-Rechtskongruenz

**Definition (kurz):**  $u \simeq_{\mathbf{L}} v$  gdw. für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt:  $uw \in \mathbf{L}$  gdw.  $vw \in \mathbf{L}$ .

**Quiz:** Wir betrachten die Nerode-Rechtskongruenz  $\simeq_{\mathbf{L}}$  für die formale Sprache ...

# $\simeq$ und reguläre Sprachen

Wir werden zeigen, dass jede reguläre Sprache endlich viele  $\simeq$ -Äquivalenzklassen hat.

## $\simeq$ und reguläre Sprachen

Wir werden zeigen, dass jede reguläre Sprache endlich viele  $\simeq$ -Äquivalenzklassen hat.

Es gilt sogar noch etwas stärkeres:

**Satz (Myhill & Nerode):** Eine Sprache  $L$  ist genau dann regulär, wenn  $\simeq_L$  endlich viele Äquivalenzklassen hat.

**Beweis:** Siehe nächste Vorlesung.

# Zusammenfassung und Ausblick

Im **Quotientenautomaten** werden äquivalente Zustände verschmolzen.

**Äquivalente Zustände** in einem (totalen) DFA können rekursiv ermittelt werden.

Der **Satz von Myhill und Nerode** charakterisiert reguläre Sprachen.

Offene Fragen:

- Wie geht es weiter mit dem Beweis der Eindeutigkeit des Minimalautomaten?
- Wie aufwändig sind die verschiedenen Konstruktionen auf regulären Sprachen?
- Welche Sprachen sind nicht regulär?