



Übungen zur Lehrveranstaltung

## Formale Systeme

Wintersemester 2021/22

### 10. Übungsblatt

Wochen vom 20. Dezember 2021 bis 7. Januar 2022

#### Aufgabe 1

Wie in der Vorlesung dargelegt wurde, werden Turingmaschinen als allgemeines Rechenmodell verstanden.

Geben Sie Turingmaschinen an, die folgende Funktionen berechnen. Dabei wird eine Eingabe  $n \in \mathbb{N}$  als  $\emptyset^n$  mit  $\emptyset \in \Sigma$  dargestellt. Es kann vorausgesetzt werden, dass die Eingabe wohlgeformt auf dem Band vorliegt. Am Ende der Berechnung hält die Turingmaschine in einem Finalzustand und das Band enthält nur das Berechnungsergebnis.

- Die Turingmaschine  $\mathcal{M}_0$  berechnet die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto 0$ , d. h. das Eingabewort auf dem Band wird gelöscht.
- Die Turingmaschine  $\mathcal{M}_{succ}$  berechnet die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n + 1$ .
- Die Turingmaschine  $\mathcal{M}_{\times 3}$  berechnet die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto 3 \cdot n$ .

#### Aufgabe 2

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{a^n b^m c^k : n, m, k \geq 1, n = 2m \text{ oder } m = k\}.$$

Zeigen Sie, dass  $L$  von Typ 1 ist, indem Sie einen LBA skizzieren, der  $L$  entscheidet.

#### Aufgabe 3

Im Folgenden bezeichne  $\mathcal{M}_w$  eine deterministische Turingmaschine mit einem Band und dem Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ , deren Codewort  $\text{enc}(\mathcal{M}_w)$  gleich  $w$  ist, falls es ein solches Codewort mit  $\text{enc}(\mathcal{M}_w) = w$  gibt (vgl. Vorlesung 19, Folie 27). Andernfalls ist  $\mathcal{M}_w = \mathcal{M}_\perp$ , eine fest gewählte deterministische Turingmaschine mit dem Eingabealphabet  $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ , die für alle Eingabewörter endlos läuft.

Ist die nachfolgende Sprache entscheidbar?

$$L = \{w \in \{0, 1, \#\}^* \mid \text{es gibt ein Wort } z \in \{0, 1, \#\}^* \text{ mit } |z| \leq |w|^2, \text{ so dass } \mathcal{M}_w \text{ das Eingabewort } z \text{ in höchstens } |z| \text{ Schritten akzeptiert}\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 4

Sei  $\mathcal{M}_w$  wie in Aufgabe 3 und

$t_{\mathcal{M}_w}(x) :=$  Anzahl der Schritte, die  $\mathcal{M}_w$  bei Eingabe  $x$  durchführt.

Ist die Sprache  $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid t_{\mathcal{M}_w}(w) > 2^{|w|}\}$  entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen  $n^2$  ergibt; also dass

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

(b) Geben Sie eine Grammatik für die Sprache

$$L = \{0^n : n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

an.

(c) Geben sie eine deterministische Zwei-Band-Turingmaschine an, die  $L$  akzeptiert.