

Formale Systeme

11. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch

Woche vom 12.–18. Januar 2026

Dr. Stephan Mennicke

Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S19) Geben Sie eine Turingmaschine \mathcal{M}_{abc} an, welche die Sprache $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$ erkennt.

Hinweis: Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion δ in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

Aufgabe 1

Gegeben ist die nichtdeterministische 3-Band-Turingmaschine

$$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, b, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

mit

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, \sqcup, \sqcup) &= \{(q_0, \langle a, R \rangle, \langle a, R \rangle, \langle \sqcup, N \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle a, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle \sqcup, L \rangle)\} \\ \delta(q_0, b, \sqcup, \sqcup) &= \{(q_0, \langle b, R \rangle, \langle \sqcup, N \rangle, \langle b, R \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle b, R \rangle, \langle \sqcup, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, b) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle \sqcup, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, \sqcup) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle \sqcup, L \rangle, \langle \sqcup, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, a, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle \sqcup, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, \sqcup, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle \sqcup, N \rangle, \langle \sqcup, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, \sqcup, \sqcup, \sqcup) &= \{(q_2, \langle \sqcup, N \rangle, \langle \sqcup, N \rangle, \langle \sqcup, N \rangle)\} \end{aligned}$$

Welche Sprache akzeptiert \mathcal{M} ? Hinweis: Sie können die Arbeitsweise von \mathcal{M} gerne mithilfe einer graphischen Repräsentation der Übergangsrelation δ nachvollziehen.

Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende deterministische Turingmaschine \mathcal{M} mit einem Band:

$\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{x, y\}, \{x, y, \#, \sqcup\}, \delta, q_0, \{q_f\} \rangle$, wobei δ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
 \delta(q_0, x) &= (q_0, x, R) \\
 \delta(q_0, y) &= (q_0, y, R) \\
 \delta(q_0, \#) &= (q_0, \#, R) \\
 \delta(q_0, \sqcup) &= (q_1, \sqcup, L) \\
 \delta(q_1, x) &= (q_2, \#, L) \\
 \delta(q_1, y) &= (q_3, \#, L) \\
 \delta(q_1, \#) &= (q_1, \sqcup, L) \\
 \delta(q_1, \sqcup) &= (q_f, \sqcup, N) \\
 \delta(q_2, x) &= (q_2, x, L) \\
 \delta(q_2, y) &= (q_0, \#, R) \\
 \delta(q_2, \#) &= (q_2, \#, L) \\
 \delta(q_3, x) &= (q_0, \#, R) \\
 \delta(q_3, y) &= (q_3, y, L) \\
 \delta(q_3, \#) &= (q_3, \#, L)
 \end{aligned}$$

Welche Sprache akzeptiert \mathcal{M} ? Ist \mathcal{M} ein Entscheider für diese Sprache? Falls nicht, modifizieren Sie \mathcal{M} so, dass sie ein Entscheider wird.

Aufgabe 3

Geben Sie in den folgenden Aufgaben jeweils eine deterministische Turingmaschine mit einem oder mehreren Bändern an.

- (a) Jeweils eine DTM \mathcal{M}_{ADD} bzw. \mathcal{M}_{MULT} für die Additions- bzw. Multiplikationsfunktion

$$\begin{aligned}
 f_{ADD} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{ADD}(n, m) &= n + m \\
 f_{MULT} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{MULT}(n, m) &= n \cdot m
 \end{aligned}$$

- (b) Jeweils eine DTM an für die Funktionen

$$\begin{aligned}
 f_{\text{fak}} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{\text{fak}}(n) &= n! \\
 f_{\log} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & f_{\log}(n) &= \begin{cases} \lfloor \log_2 n \rfloor & \text{falls } n \geq 1 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: $0! = 1$.)

Hinweise: Es genügen informelle Beschreibungen; etwa durch Skizzen, aus denen ersichtlich wird, wie (aus der Vorlesung oder Übung bekannte oder selbst definierte) Turingmaschinen miteinander verknüpft werden. Darüber hinaus können Sie die Zahlenkodierung frei entscheiden.