

## Formale Systeme

### 11. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch

Woche vom 12.–18. Januar 2026

Dr. Stephan Mennicke

Wintersemester 2025/26

#### Aufgabe zur Selbstkontrolle

- S19) Geben Sie eine Turingmaschine  $\mathcal{M}_{abc}$  an, welche die Sprache  $L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 0\}$  erkennt.

*Hinweis:* Nutzen Sie die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise für eine solche TM aus der Vorlesung. Neben der Darstellung in Diagrammform ist ebenfalls die Darstellung der Übergangsfunktion  $\delta$  in Tabellenform möglich. Achten Sie auf die Kommentare in der Tabelle.

#### Aufgabe 1

Gegeben ist die nichtdeterministische 3-Band-Turingmaschine

$$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, b, \_, \}\cup\{\delta, q_0, \{q_2\}\})$$

mit

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, \_, \_) &= \{(q_0, \langle a, R \rangle, \langle a, R \rangle, \langle \_, N \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle a, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle \_, L \rangle)\} \\ \delta(q_0, b, \_, \_) &= \{(q_0, \langle b, R \rangle, \langle \_, N \rangle, \langle b, R \rangle), \\ &\quad (q_1, \langle b, R \rangle, \langle \_, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, b) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle \_, L \rangle, \langle b, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, a, a, \_) &= \{(q_1, \langle a, R \rangle, \langle \_, L \rangle, \langle \_, N \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, a, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle a, N \rangle, \langle \_, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, b, \_, b) &= \{(q_1, \langle b, R \rangle, \langle \_, N \rangle, \langle \_, L \rangle)\} \\ \delta(q_1, \_, \_, \_) &= \{(q_2, \langle \_, N \rangle, \langle \_, N \rangle, \langle \_, N \rangle)\}\end{aligned}$$

Welche Sprache akzeptiert  $\mathcal{M}$ ? Hinweis: Sie können die Arbeitsweise von  $\mathcal{M}$  gerne mithilfe einer graphischen Repräsentation der Übergangsrelation  $\delta$  nachvollziehen.

## Aufgabe 2

Gegeben ist die folgende deterministische Turingmaschine  $\mathcal{M}$  mit einem Band:

$\mathcal{M} = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{x, y\}, \{x, y, \#, \_\}, \delta, q_0, \{q_f\} \rangle$ , wobei  $\delta$  wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, x) &= (q_0, x, R) \\ \delta(q_0, y) &= (q_0, y, R) \\ \delta(q_0, \#) &= (q_0, \#, R) \\ \delta(q_0, \_) &= (q_1, \_, L) \\ \delta(q_1, x) &= (q_2, \#, L) \\ \delta(q_1, y) &= (q_3, \#, L) \\ \delta(q_1, \#) &= (q_1, \_, L) \\ \delta(q_1, \_) &= (q_f, \_, N) \\ \delta(q_2, x) &= (q_2, x, L) \\ \delta(q_2, y) &= (q_0, \#, R) \\ \delta(q_2, \#) &= (q_2, \#, L) \\ \delta(q_3, x) &= (q_0, \#, R) \\ \delta(q_3, y) &= (q_3, y, L) \\ \delta(q_3, \#) &= (q_3, \#, L)\end{aligned}$$

Welche Sprache akzeptiert  $\mathcal{M}$ ? Ist  $\mathcal{M}$  ein Entscheider für diese Sprache? Falls nicht, modifizieren Sie  $\mathcal{M}$  so, dass sie ein Entscheider wird.

## Aufgabe 3

Geben Sie in den folgenden Aufgaben jeweils eine deterministische Turingmaschine mit einem oder mehreren Bändern an.

- (a) Jeweils eine DTM  $\mathcal{M}_{ADD}$  bzw.  $\mathcal{M}_{MULT}$  für die Additions- bzw. Multiplikationsfunktion

$$\begin{aligned}f_{ADD} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_{ADD}(n, m) = n + m \\ f_{MULT} &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_{MULT}(n, m) = n \cdot m\end{aligned}$$

- (b) Jeweils eine DTM an für die Funktionen

$$\begin{aligned}f_{fak} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_{fak}(n) = n! \\ f_{\log} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_{\log}(n) = \begin{cases} \lfloor \log_2 n \rfloor & \text{falls } n \geq 1 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

(Zur Erinnerung:  $0! = 1$ .)

Hinweise: Es genügen informelle Beschreibungen; etwa durch Skizzen, aus denen ersichtlich wird, wie (aus der Vorlesung oder Übung bekannte oder selbst definierte) Turingmaschinen miteinander verknüpft werden. Darüber hinaus können Sie die Zahlenkodierung frei entscheiden.