Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Theoretische Informatik und Logik
1. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke
Woche vom 20.–26. April 2026 — Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die nachfolgende aussagenlogische Formel die Menge ihrer Teilformeln mit den aussagenlogischen Atomen a, b, c, d: $F = \neg\big((d \leftrightarrow b) \wedge \big(c \rightarrow (d \vee \neg a)\big)\big)$.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, welche der folgenden logischen Konsequenzen gelten. Erstellen Sie dazu jeweils eine Wahrheitswertetabelle mit allen relevanten Teilformeln.

a) $\neg a \vee b, \neg b \vee c, b \wedge c \models (a \leftrightarrow b) \vee c$

b) $a \rightarrow b, c \vee a, a \rightarrow \neg b, \neg c \models a$

c) $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), \neg c \wedge b, \neg(\neg a \vee b) \models \neg(a \vee b)$

Aufgabe 3

Installieren Sie sich das Werkzeug Z3, bspw. innerhalb einer Python-Umgebung per `pip install z3-solver`. Ein Beispiel zur Einbindung von Z3 in Python steht Ihnen als Jupyter-Notebook auf unserer Portalseite zur Vorlesung zur Verfügung.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe von Z3. Es handelt sich bei p, q, r um (aussagenlogische) Atome.

a) Weisen Sie die Erfüllbarkeit der Formel $\neg\neg p \leftrightarrow p$ nach.

b) Weisen Sie für $\neg p \wedge ((p \vee q) \wedge \neg q)$ nach, dass es sich um eine unerfüllbare Formel handelt.

c) Weisen Sie für $\big((p \wedge q) \rightarrow r\big) \leftrightarrow \big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big)$ nach, dass sie eine Tautologie ist.

Aufgabe 4

Für eine Formel F ist die Größe $|F|$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
|p| &:= 1 \\
|\neg G| &:= |G| + 1 \\
|G_1 \vee G_2| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|G_1 \wedge G_2| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|G_1 \rightarrow G_2| &:= |G_1| + |G_2| + 1 \\
|G_1 \leftrightarrow G_2| &:= |G_1| + |G_2| + 1,
\end{aligned}$$

wobei G_1 und G_2 Formeln sind und $p \in \mathcal{P}$ ist. Zeigen Sie (bspw. mittels struktureller Induktion) die folgenden Aussagen:

a) Die Anzahl der Atome in F ist beschränkt durch $|F|$.

b) Die Anzahl der Unterformeln in F ist beschränkt durch $|F|$.

Aufgabe 5

Inspektor Craig wird zu einem wichtigen Fall nach Transsilvanien gerufen, in dem es darum geht herauszufinden, welcher von zwei Beschuldigten ein Vampir ist. Wie allgemein bekannt ist, besteht die Bevölkerung in Transsilvanien zum Teil aus Menschen und zum anderen Teil aus Vampiren. Die Menschen sagen stets die Wahrheit, die Vampire lügen stets. Außerdem ist ein Teil der Bevölkerung Transsilvaniens verrückt: Alles, was wahr ist, glauben sie, sei falsch, und umgekehrt. Nicht verrückte Transsilvanier hingegen halten genau das für wahr, was wahr ist. Insbesondere sagt ein verrückter Vampir (wie auch ein nicht-verrückter Mensch) stets das Richtige: Eine Aussage, die wahr ist, glaubt er, sei falsch, da er aber stets lügt, gibt er dennoch eine richtige Antwort.

Craig verhört die zwei Beschuldigten Lucy und Minna, von denen bekannt ist, dass eine ein Vampir ist und die andere nicht. Das Verhör geht wie folgt vonstatten:

> *Craig* (zu Lucy): Erzählen Sie mir von Ihnen.
> *Lucy*: Wir sind beide verrückt.
> *Craig* (zu Minna): Ist das richtig?
> *Minna*: Natürlich nicht!

Formalisieren Sie dieses Szenario mithilfe aussagenlogischer Formeln und finden Sie heraus, wer der Vampir ist!

Diese Aufgabe stammt aus: *Raymond Smullyan: The Lady or the Tiger?. Alfred A. Knopf, 1986.*

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S1) Wiederholen Sie die Begriffe *Erfüllbarkeit*, *Unerfüllbarkeit* und *Allgemeingültigkeit* bezüglich aussagenlogischer Formeln. Welche der nachfolgenden Formeln besitzt welche dieser Eigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $a \leftrightarrow ((a \land \neg a) \lor a)$

b) $(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$

c) $((a \to b) \lor (c \to a)) \land (b \leftrightarrow a)$

d) $((\neg a \to b) \land (b \to c)) \land \neg c$