

# Formale Systeme

## 21. Vorlesung: WHILE und LOOP

Markus Krötzsch

Professur für Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 12. Januar 2026

# Was bisher geschah . . .

## **Grundbegriffe, die wir verstehen und erklären können:**

DTM, NTM, Entscheider, Aufzähler, berechenbar/entscheidbar, semi-entscheidbar, unentscheidbar, Church-Turing-These

## **Das Unentscheidbare:**

- „An algorithm is a finite answer to an infinite number of questions.“  
(Stephen Kleene)
- Aber: Es gibt mehr Möglichkeiten, unendlich viele Fragen zu beantworten, als es Algorithmen geben kann (Georg Cantor)

## **Weitere wichtige Ergebnisse:**

- DTM und NTM haben die gleiche Ausdrucksstärke
- Zusammenhang Aufzähler  $\leftrightarrow$  Semi-Entscheidbarkeit
- Busy Beaver ist unentscheidbar:  
„Was eine TM schaffen kann, das kann keine TM vorherberechnen.“

# LOOP

# Von TMs zu Programmiersprachen

## Turingmaschinen als Berechnungsmodell

- **Pro:** Einfache, kurze Beschreibung (eine Folie)  
     $\leadsto$  Beweise oft ebenfalls einfach und kurz
- **Kontra:** Umständliche Programmierung  
     $\leadsto$  einfache Algorithmen erfordern tausende Einzelschritte

# Von TMs zu Programmiersprachen

## Turingmaschinen als Berechnungsmodell

- **Pro:** Einfache, kurze Beschreibung (eine Folie)  
    ~> Beweise oft ebenfalls einfach und kurz
- **Kontra:** Umständliche Programmierung  
    ~> einfache Algorithmen erfordern tausende Einzelschritte

## Programmiersprachen als Berechnungsmodell

- **Pro:** Einfache, bequeme Programmierung  
    ~> Großer Befehlssatz + Bibliotheken für Standardaufgaben
- **Kontra:** Umständliche Beschreibung  
    (z.B. Beschreibung von C++ [ISO/IEC 14882] hat 776 Seiten)  
    ~> Eigenschaften oft unklar; Beweise sehr umständlich

# LOOP-Programme

**Idee:** Definiere eine imperative Programmiersprache, die dennoch sehr einfach ist.

## Features:

- Variablen  $x_0, x_1, x_2, \dots$  oder auch  $x, y, \text{variablenName}, \dots$   
alle vom Typ “natürliche Zahl”
- Wertezuweisungen der Form

$x := y + 42$       und       $x := y - 23$

für beliebige natürliche Zahlen und Variablennamen

- “For-Schleifen”: **LOOP**  $x$  **DO** ... **END**

# LOOP-Programme: Syntax

**Definition:** Die Programmiersprache **LOOP** basiert auf einer unendlichen Menge **V** von Variablen und der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen. **LOOP-Programme** sind induktiv definiert:

- Die Ausdrücke

$$x := y + n \quad \text{und} \quad x := y - n \quad (\text{Wertzuweisung})$$

sind LOOP-Programme für alle  $x, y \in \mathbf{V}$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

- Wenn  $P_1$  und  $P_2$  LOOP-Programme sind, dann ist

$$P_1; P_2 \quad (\text{Hintereinanderausführung})$$

ein LOOP-Programm.

- Wenn  $P$  ein LOOP-Programm ist, dann ist

$$\mathbf{LOOP} \ x \ \mathbf{DO} \ P \ \mathbf{END} \quad (\text{Schleife})$$

ein LOOP-Programm, für jede Variable  $x \in \mathbf{V}$ .

**Vereinfachung:** Wir erlauben ; in Programmen durch Zeilenumbrüche zu ersetzen

# Beispiel

Das folgende LOOP-Programm addiert zum Wert von y genau x-mal die Zahl 2:

```
LOOP x DO
```

```
  y := y + 2
```

```
END
```



# Beispiel

Das folgende LOOP-Programm addiert zum Wert von  $y$  genau  $x$ -mal die Zahl 2:

```
LOOP  $x$  DO
```

```
   $y := y + 2$ 
```

```
END
```

Dies entspricht also der Zuweisung  $y := y + (2 * x)$ , die wir in LOOP nicht direkt schreiben können.

# LOOP-Programme: Semantik (1)

## Funktionsweise eines LOOP-Programms $P$ :

- **Eingabe:** Eine Liste von  $k$  natürlichen Zahlen  
(Anmerkung:  $k$  wird nicht durch das Programm festgelegt)
- **Ausgabe:** Eine natürliche Zahl

$P$  berechnet also eine totale Funktion  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , für beliebige  $k$

# LOOP-Programme: Semantik (1)

## Funktionsweise eines LOOP-Programms $P$ :

- **Eingabe:** Eine Liste von  $k$  natürlichen Zahlen  
(Anmerkung:  $k$  wird nicht durch das Programm festgelegt)
- **Ausgabe:** Eine natürliche Zahl

$P$  berechnet also eine totale Funktion  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ , für beliebige  $k$

## Initialisierung für Eingabe $n_1, \dots, n_k$ :

- LOOP speichert für jede Variable eine natürliche Zahl als Wert
- Den Variablen  $x_1, \dots, x_k$  werden anfangs die Werte  $n_1, \dots, n_k$  zugewiesen
- Allen anderen Variablen wird der Anfangswert 0 zugewiesen

# LOOP-Programme: Semantik (2)

Nach der Initialisierung wird das LOOP-Programm abgearbeitet:

- $x := y + n$ :  
der Variable  $x$  wird als neuer Wert die Summe des (alten) Wertes für  $y$  und der Zahl  $n$  zugewiesen
- $x := y - n$ :  
der Variable  $x$  wird als neuer Wert die Differenz des (alten) Wertes für  $y$  und der Zahl  $n$  zugewiesen, falls diese größer 0 ist; ansonsten wird  $x$  der Wert 0 zugewiesen
- $P_1 ; P_2$ :  
erst wird  $P_1$  abgearbeitet, dann  $P_2$
- **LOOP  $x$  DO  $P$  END:**  
 $P$  wird genau  $n$ -mal ausgeführt, für den Zahlenwert  $n$ , der  $x$  anfangs zugewiesen ist ( $n$  ändert sich also nicht, wenn  $P$  den Wert von  $x$  ändert)

# LOOP-Programme: Semantik (3)

## Ausgabe eines LOOP-Programms:

- Das Ergebnis der Abarbeitung ist der Wert der Variable  $x_0$  nach dem Beenden der Berechnung

# LOOP-Programme: Semantik (3)

## Ausgabe eines LOOP-Programms:

- Das Ergebnis der Abarbeitung ist der Wert der Variable  $x_0$  nach dem Beenden der Berechnung

**Satz:** LOOP-Programme terminieren immer nach endlich vielen Schritten.

# LOOP-Programme: Semantik (3)

## Ausgabe eines LOOP-Programms:

- Das Ergebnis der Abarbeitung ist der Wert der Variable  $x_0$  nach dem Beenden der Berechnung

**Satz:** LOOP-Programme terminieren immer nach endlich vielen Schritten.

**Beweis:** Die Behauptung gilt sicherlich für Wertzuweisungen.

Weitere Fälle:

- $P_1 ; P_2$ :  
wenn  $P_1$  und  $P_2$  nach endlich vielen Schritten terminieren, dann auch  $P_1 ; P_2$
- **LOOP x DO P END:**  
für jede mögliche Zuweisung von  $x$  wird  $P$  endlich oft wiederholt; wenn  $P$  in endlich vielen Schritten terminiert, dann also auch die Schleife □

# Anmerkung: Strukturelle Induktion

Der vorangegangene einfache Beweis verwendet **Induktion**, um eine Aussage für unendlich viele Programme zu zeigen:

- **Induktionsanfang:** Die Behauptung gilt für Wertzuweisungen (die einfachsten LOOP-Programme)
- **Induktionsannahme:** Die Behauptung gilt bereits für Programme  $P, P_1, P_2$
- **Induktionsschritte:**
  - (1) Die Behauptung gilt dann auch für  $P_1; P_2$ .
  - (2) Die Behauptung gilt dann auch für **LOOP** x **DO P END**.

Merke: Induktion kann man nicht nur auf natürliche Zahlen anwenden, sondern auf alle (unendlichen) Mengen, die man induktiv mit endlich vielen Operationen aus Grundfällen erzeugen kann.



# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable:** “ $x := y$ ”:

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable:** “ $x := y$ ”:

```
x := y + 0
```

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable:** “ $x := y$ ”:

```
x := y + 0
```

**Wertzuweisung mit 0:** “ $x := 0$ ”:

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable:** “x := y”:

```
x := y + 0
```

**Wertzuweisung mit 0:** “x := 0”:

```
LOOP x DO
```

```
  x := x - 1
```

```
END
```

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable: “ $x := y$ ”:**

```
x := y + 0
```

**Wertzuweisung mit 0: “ $x := 0$ ”:**

```
LOOP x DO
```

```
  x := x - 1
```

```
END
```

**Wertzuweisung einer beliebigen konstanter Zahl: “ $x := n$ ”:**

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# Programmieren in LOOP (1)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung mit Variable: “ $x := y$ ”:**

```
x := y + 0
```

**Wertzuweisung mit 0: “ $x := 0$ ”:**

```
LOOP x DO
```

```
  x := x - 1
```

```
END
```

**Wertzuweisung einer beliebigen konstanter Zahl: “ $x := n$ ”:**

```
x := 0
```

```
x := x + n
```

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

## Programmieren in LOOP (2)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung:** “ $x := y + z$ ”:

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

## Programmieren in LOOP (2)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung:** “ $x := y + z$ ”:

```
x := y
LOOP z DO
  x := x + 1
END
```

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.



## Programmieren in LOOP (2)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung:** “ $x := y + z$ ”:

```
x := y
LOOP z DO
  x := x + 1
END
```

**Fallunterscheidung:** “IF  $x \neq 0$  THEN  $P$  END”:

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

## Programmieren in LOOP (2)

LOOP hat nur wenige Ausdrucksmittel, aber man kann sich leicht weitere als Makros definieren.<sup>1</sup>

**Wertzuweisung:** “ $x := y + z$ ”:

```
x := y
LOOP z DO
  x := x + 1
END
```

**Fallunterscheidung:** “IF  $x \neq 0$  THEN  $P$  END”:

```
LOOP x DO y := 1 END
LOOP y DO P END
```

Dabei ist  $y$  eine frische Variable, die bisher nirgends sonst verwendet wird.

---

<sup>1</sup>Nutzen Sie zum Testen auch unseren [LOOP-Simulator \[Link\]](#) online.

# LOOP-Berechenbare Funktionen

**Definition:** Eine Funktion  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **LOOP-berechenbar**, wenn es ein LOOP-Programm gibt, das die Funktion berechnet.

# LOOP-Berechenbare Funktionen

**Definition:** Eine Funktion  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **LOOP-berechenbar**, wenn es ein LOOP-Programm gibt, das die Funktion berechnet.

Beispiel: Die folgenden Funktionen sind LOOP-berechenbar:

- Addition:  $\langle x, y \rangle \mapsto x + y$  (gerade gezeigt)
- Multiplikation:  $\langle x, y \rangle \mapsto x \cdot y$  (siehe Übung)
- Potenz:  $\langle x, y \rangle \mapsto x^y$  (entsteht aus  $\cdot$  wie  $\cdot$  aus  $+$ )
- und viele andere ... (max, min, div, mod, usw.)

# LOOP jenseits von $\mathbb{N}$

# LOOP jenseits von $\mathbb{N}$

LOOP kann auch das  $x$ -te Bit der Binärkodierung von  $y$  berechnen. Dadurch kann man in LOOP (auf umständliche Weise) auch Daten verarbeiten, die keine Zahlen sind:

- (1) Kodiere beliebigen Input binär
- (2) Evaluiere die Binärkodierung als natürliche Zahl und verwende diese als Eingabe
- (3) Dekodiere den Input im LOOP-Programm

In diesem Sinne sind viele weitere Funktionen LOOP-berechenbar.

# LOOP jenseits von $\mathbb{N}$

LOOP kann auch das  $x$ -te Bit der Binärokodierung von  $y$  berechnen. Dadurch kann man in LOOP (auf umständliche Weise) auch Daten verarbeiten, die keine Zahlen sind:

- (1) Kodiere beliebigen Input binär
- (2) Evaluiere die Binärokodierung als natürliche Zahl und verwende diese als Eingabe
- (3) Dekodiere den Input im LOOP-Programm

In diesem Sinne sind viele weitere Funktionen LOOP-berechenbar.

Beispiele für LOOP-berechenbare Funktionen:

- das Wortproblem regulärer, kontextfreier und kontextsensitiver Sprachen
- alle Probleme in NP, z.B. Erfüllbarkeit propositionaler Logik
- praktisch alle gängigen Algorithmen (Sortieren, Suchen, Optimieren, ...)

# Die Grenzen von LOOP

**Satz:** Es gibt berechenbare Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.



# Die Grenzen von LOOP

**Satz:** Es gibt berechenbare Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Das ist weniger überraschend, als es vielleicht klingt:

**Beweis:** Ein LOOP-Programm terminiert immer. Daher ist jede LOOP-berechenbare Funktion total. Es gibt aber auch nicht-totale Funktionen, die berechenbar sind (z.B. die “partiellste” Funktion, die nirgends definiert ist). □

# LOOP-berechenbar $\neq$ berechenbar

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

# LOOP-berechenbar $\neq$ berechenbar

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Das ist überraschend. Hilbert glaubte 1926 noch, dass alle Funktionen so berechnet werden können – quasi ein erster Versuch der Definition von Berechenbarkeit.

Hilbert definierte LOOP-Berechenbarkeit etwas anders, mithilfe sogenannter **primitiv rekursiver Funktionen**.

# LOOP-berechenbar $\neq$ berechenbar

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Das ist überraschend. Hilbert glaubte 1926 noch, dass alle Funktionen so berechnet werden können – quasi ein erster Versuch der Definition von Berechenbarkeit.

Hilbert definierte LOOP-Berechenbarkeit etwas anders, mithilfe sogenannter **primitiv rekursiver Funktionen**.

Bewiesen wurde der Satz zuerst von zwei Studenten Hilberts:

- Gabriel Sudan (1927)
- Wilhelm Ackermann (1928)

# LOOP-berechenbar $\neq$ berechenbar

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Das ist überraschend. Hilbert glaubte 1926 noch, dass alle Funktionen so berechnet werden können – quasi ein erster Versuch der Definition von Berechenbarkeit.

Hilbert definierte LOOP-Berechenbarkeit etwas anders, mithilfe sogenannter **primitiv rekursiver Funktionen**.

Bewiesen wurde der Satz zuerst von zwei Studenten Hilberts:

- Gabriel Sudan (1927)
- Wilhelm Ackermann (1928)

Jeder der beiden gab eine Funktion an (Sudan-Funktion und Ackermann-Funktion), die nicht LOOP-berechenbar ist.

Unser Beweis verwendet eine etwas andere Idee ...

# Fleißige Biber für LOOP

Die **Länge** eines LOOP-Programms ist die Anzahl an Zeichen, aus denen es besteht.

Dazu nehmen wir an:

- Zahlen werden in ihrer Dezimalkodierung geschrieben
- Variablen sind mit lateinischen Buchstaben und Ziffern benannt (wir sehen  $x_{123}$  als Schreibweise für  $x123$  an)
- Wir betrachten ; als ein Zeichen (und Zeilenumbrüche ebenso)

# Fleißige Biber für LOOP

Die **Länge** eines LOOP-Programms ist die Anzahl an Zeichen, aus denen es besteht.

Dazu nehmen wir an:

- Zahlen werden in ihrer Dezimalkodierung geschrieben
- Variablen sind mit lateinischen Buchstaben und Ziffern benannt (wir sehen  $x_{123}$  als Schreibweise für  $x123$  an)
- Wir betrachten `;` als ein Zeichen (und Zeilenumbrüche ebenso)

**Definition:** Die Funktion  $\Sigma_{\text{LOOP}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  liefert für jede Zahl  $\ell$  die größte Zahl  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell)$ , die ein LOOP-Programm der Länge  $\leq \ell$  für eine leere Eingabe (alle Variablen sind 0) ausgibt. Dabei sei  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell) = 0$  falls es kein Programm der Länge  $\leq \ell$  gibt.

# Fleißige Biber für LOOP

Die **Länge** eines LOOP-Programms ist die Anzahl an Zeichen, aus denen es besteht.

Dazu nehmen wir an:

- Zahlen werden in ihrer Dezimalkodierung geschrieben
- Variablen sind mit lateinischen Buchstaben und Ziffern benannt (wir sehen  $x_{123}$  als Schreibweise für  $x123$  an)
- Wir betrachten  $;$  als ein Zeichen (und Zeilenumbrüche ebenso)

**Definition:** Die Funktion  $\Sigma_{\text{LOOP}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  liefert für jede Zahl  $\ell$  die größte Zahl  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell)$ , die ein LOOP-Programm der Länge  $\leq \ell$  für eine leere Eingabe (alle Variablen sind 0) ausgibt. Dabei sei  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell) = 0$  falls es kein Programm der Länge  $\leq \ell$  gibt.

**Beobachtung:**  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist wohldefiniert:

- Die Zahl der LOOP-Programme mit maximaler Länge  $\ell$  ist endlich
- Unter diesen Programmen gibt es eine maximale Ausgabe



# Beispiele

**Beispiel:** Die LOOP-Anweisung  $x_0 := y + 9$  liefert das fleißigste Programm für  $\ell = 7$ , d.h.  $\Sigma_{\text{LOOP}}(7) = 9$ .

# Beispiele

**Beispiel:** Die LOOP-Anweisung  $x_0 := y + 9$  liefert das fleißigste Programm für  $\ell = 7$ , d.h.  $\Sigma_{\text{LOOP}}(7) = 9$ .

Für  $\ell = 8$  gilt dementsprechend bereits  $\Sigma_{\text{LOOP}}(8) = 99$ .

Für  $\ell < 7$  gibt es keine Zuweisung, die  $x_0$  ändert, d.h.,  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell) = 0$ .

# Beispiele

**Beispiel:** Die LOOP-Anweisung  $x_0 := y + 9$  liefert das fleißigste Programm für  $\ell = 7$ , d.h.  $\Sigma_{\text{LOOP}}(7) = 9$ .

Für  $\ell = 8$  gilt dementsprechend bereits  $\Sigma_{\text{LOOP}}(8) = 99$ .

Für  $\ell < 7$  gibt es keine Zuweisung, die  $x_0$  ändert, d.h.,  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell) = 0$ .

**Bonusaufgabe:** Gibt es eine Zahl  $\ell$ , bei der  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell)$  durch ein Programm berechnet wird, welches die Zahl  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell)$  nicht als Konstante im Quelltext enthält? Wie könnte das entsprechende Programm aussehen?

## Beweis (1)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

# Beweis (1)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

# Beweis (1)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (1) ist leicht zu zeigen:

- Es gibt endlich viele LOOP-Programme der Länge  $\leq \ell$
- Man kann alle davon durchlaufen und auf einem Computer simulieren
- Die Simulation liefert immer nach endlich vielen Schritten ein Ergebnis
- Das Maximum aller Ergebnisse ist der Wert von  $\Sigma_{\text{LOOP}}(\ell)$

(Anmerkung: Wir verwenden hier einen intuitiven Berechnungsbegriff und Church-Turing.)

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:



## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)
- Sei  $P_m$  das Programm  $x_1 := x_1 + m$  (Länge:  $7 + \lceil \log_{10} m \rceil$ )

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)
- Sei  $P_m$  das Programm  $x_1 := x_1 + m$  (Länge:  $7 + \lceil \log_{10} m \rceil$ )
- Sei  $P_{++}$  das Programm  $x_0 := x_0 + 1$  (Länge: 8)

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)
- Sei  $P_m$  das Programm  $x_1 := x_1 + m$  (Länge:  $7 + \lceil \log_{10} m \rceil$ )
- Sei  $P_{++}$  das Programm  $x_0 := x_0 + 1$  (Länge: 8)
- Wir definieren  $P = P_m ; P_{\Sigma} ; P_{++}$ .

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)
- Sei  $P_m$  das Programm  $x_1 := x_1 + m$  (Länge:  $7 + \lceil \log_{10} m \rceil$ )
- Sei  $P_{++}$  das Programm  $x_0 := x_0 + 1$  (Länge: 8)
- Wir definieren  $P = P_m ; P_{\Sigma} ; P_{++}$ .  
Die Länge von  $P$  ist  $k + 17 + \lceil \log_{10} m \rceil$  und damit  $\leq m$ .

## Beweis (2)

**Satz:** Es gibt berechenbare totale Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

**Beweis:** Wir zeigen zwei Teilaussagen:

- (1)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist berechenbar
- (2)  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist nicht LOOP-berechenbar

Behauptung (2) zeigen wir per Widerspruch:

- Angenommen  $\Sigma_{\text{LOOP}}$  ist LOOP-berechenbar durch Programm  $P_{\Sigma}$ . Sei  $k$  die Länge von  $P_{\Sigma}$ .
- Wir wählen eine Zahl  $m$  mit  $m \geq k + 17 + \log_{10} m$  (immer möglich)
- Sei  $P_m$  das Programm  $x_1 := x_1 + m$  (Länge:  $7 + \lceil \log_{10} m \rceil$ )
- Sei  $P_{++}$  das Programm  $x_0 := x_0 + 1$  (Länge: 8)
- Wir definieren  $P = P_m ; P_{\Sigma} ; P_{++}$ .  
Die Länge von  $P$  ist  $k + 17 + \lceil \log_{10} m \rceil$  und damit  $\leq m$ .  
Aber  $P$  gibt die Zahl  $\Sigma_{\text{LOOP}}(m) + 1$  aus. Widerspruch. □

# WHILE



# Was fehlt?

Frage: Wieso ist LOOP zu schwach?

# Was fehlt?

Frage: Wieso ist LOOP zu schwach?

Intuitive Antwort: LOOP-Programme terminieren immer (zu vorhersehbar)

~> Wir brauchen ein weniger vorhersehbares Programmkonstrukt

# WHILE-Programme: Syntax und Semantik

**Definition:** Die Programmiersprache **WHILE** basiert wie **LOOP** auf Variablen **V** und natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ .

**WHILE-Programme** sind induktiv definiert:

- Jedes **LOOP**-Programm ist ein **WHILE**-Programm
- Wenn  $P$  ein **WHILE**-Programm ist, dann ist

**WHILE**  $x \neq 0$  **DO**  $P$  **END**

ein **WHILE**-Programm, für jede Variable  $x \in \mathbf{V}$ .

# WHILE-Programme: Syntax und Semantik

**Definition:** Die Programmiersprache **WHILE** basiert wie **LOOP** auf Variablen **V** und natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ .

**WHILE-Programme** sind induktiv definiert:

- Jedes **LOOP**-Programm ist ein **WHILE**-Programm
- Wenn  $P$  ein **WHILE**-Programm ist, dann ist

**WHILE**  $x \neq 0$  **DO**  $P$  **END**

ein **WHILE**-Programm, für jede Variable  $x \in V$ .

Semantik von **WHILE**  $x \neq 0$  **DO**  $P$  **END**:

$P$  wird ausgeführt solange der aktuelle Wert von  $x$  ungleich 0 ist.

(dies hängt davon ab, wie  $P$  den Wert von  $x$  ändert)

Ansonsten werden **WHILE**-Programme wie **LOOP**-Programme ausgewertet.

# WHILE: Beobachtungen<sup>1</sup>

Es ist möglich, dass ein WHILE-Programm nicht terminiert, z.B.

```
x := 1
WHILE x != 0 DO
  y := y + 2
END
```

---

<sup>1</sup> Unser Online-Tool funktioniert auch als [WHILE-Simulator \[Link\]](#).

# WHILE: Beobachtungen<sup>1</sup>

Es ist möglich, dass ein WHILE-Programm nicht terminiert, z.B.

```
x := 1
WHILE x != 0 DO
  y := y + 2
END
```

Wir können **LOOP x DO P END** ersetzen durch:

```
z := x
WHILE z != 0 DO
  P
  z := z - 1
END
```

(für ein frisches z)

Also sind LOOP-Schleifen eigentlich nicht mehr nötig.

<sup>1</sup> Unser Online-Tool funktioniert auch als [WHILE-Simulator \[Link\]](#).

# WHILE-Berechenbare Funktionen

**Definition:** Eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **WHILE-berechenbar**, wenn es ein WHILE-Programm  $P$  gibt, so dass gilt:

- Falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist, dann terminiert  $P$  bei Eingabe  $n_1, \dots, n_k$  mit der Ausgabe  $f(n_1, \dots, n_k)$
- Falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  nicht definiert ist, dann terminiert  $P$  bei Eingabe  $n_1, \dots, n_k$  nicht

# WHILE-Berechenbare Funktionen

**Definition:** Eine partielle Funktion  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **WHILE-berechenbar**, wenn es ein WHILE-Programm  $P$  gibt, so dass gilt:

- Falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  definiert ist, dann terminiert  $P$  bei Eingabe  $n_1, \dots, n_k$  mit der Ausgabe  $f(n_1, \dots, n_k)$
- Falls  $f(n_1, \dots, n_k)$  nicht definiert ist, dann terminiert  $P$  bei Eingabe  $n_1, \dots, n_k$  nicht

Das wichtigste Ergebnis zu WHILE ist nun das folgende:

**Satz:** Eine partielle Funktion ist genau dann WHILE-berechenbar, wenn sie Turing-berechenbar ist.



# WHILE $\rightarrow$ TM

**Behauptung 1:** DTMs können WHILE-Programme simulieren:

# WHILE $\rightarrow$ TM

**Behauptung 1:** DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.

# WHILE $\rightarrow$ TM

**Behauptung 1:** DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.
- Natürliche Zahlen werden auf den Bändern binär kodiert.

# WHILE $\rightarrow$ TM

## **Behauptung 1:** DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.
- Natürliche Zahlen werden auf den Bändern binär kodiert.
- DTMs können leicht (a) ein Band auf ein anderes kopieren, (b) die Zahl auf einem Band um eins erhöhen  
 $\leadsto$  daraus kann man schon DTMs für  $x := y + n$  erzeugen

# WHILE $\rightarrow$ TM

## **Behauptung 1:** DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.
- Natürliche Zahlen werden auf den Bändern binär kodiert.
- DTMs können leicht (a) ein Band auf ein anderes kopieren, (b) die Zahl auf einem Band um eins erhöhen  
 $\leadsto$  daraus kann man schon DTMs für  $x := y + n$  erzeugen
- Simulation von  $x := y - n$  ist analog möglich (mit zusätzlichem Test auf Gleichheit mit 0 beim Dekrementieren)

# WHILE $\rightarrow$ TM

## Behauptung 1: DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.
- Natürliche Zahlen werden auf den Bändern binär kodiert.
- DTMs können leicht (a) ein Band auf ein anderes kopieren, (b) die Zahl auf einem Band um eins erhöhen  
 $\leadsto$  daraus kann man schon DTMs für  $x := y + n$  erzeugen
- Simulation von  $x := y - n$  ist analog möglich (mit zusätzlichem Test auf Gleichheit mit 0 beim Dekrementieren)
- Sequentielle Programmausführung  $P_1 ; P_2$  wird direkt im Zustandsgraphen der DTM umgesetzt („Hintereinanderhängung“ von TMs)

# WHILE $\rightarrow$ TM

## Behauptung 1: DTMs können WHILE-Programme simulieren:

- Wir verwenden eine Mehrband-TM, in der es für jede Variable im simulierten Programm ein eigenes Band gibt.
- Natürliche Zahlen werden auf den Bändern binär kodiert.
- DTMs können leicht (a) ein Band auf ein anderes kopieren, (b) die Zahl auf einem Band um eins erhöhen  
 $\leadsto$  daraus kann man schon DTMs für  $x := y + n$  erzeugen
- Simulation von  $x := y - n$  ist analog möglich (mit zusätzlichem Test auf Gleichheit mit 0 beim Dekrementieren)
- Sequentielle Programmausführung  $P_1 ; P_2$  wird direkt im Zustandsgraphen der DTM umgesetzt („Hintereinanderhängung“ von TMs)
- While-Schleifen sind durch Zyklen im Zustandsgraph darstellbar, wobei am Anfang jeweils ein Test auf Gleichheit mit 0 steht, um die Schleife verlassen zu können

# TM $\rightarrow$ WHILE (1)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:



# TM $\rightarrow$ WHILE (1)

## Behauptung 2: WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass das TM-Arbeitsalphabet  $\Gamma = \{0, 1\}$  ist, und dass die Zustände natürliche Zahlen sind
- Eine TM-Konfiguration  $a_1 a_2 \cdots a_p q a_{p+1} a_{p+2} \cdots a_\ell$  wird dargestellt durch drei Variablen:
  - `left` hat den Wert, der durch  $a_1 a_2 \cdots a_p$  binär kodiert wird (least significant bit ist dabei  $a_p$ )
  - `state` hat den Wert  $q$
  - `thgir` hat den Wert, der durch  $a_\ell \cdots a_{p+2} a_{p+1}$  binär kodiert wird (least significant bit ist also  $a_{p+1}$ )
- Diese Kodierung kann leicht auf größere Arbeitsalphabete erweitert werden ( $n$ -äre statt binäre Kodierung)

## TM $\rightarrow$ WHILE (2)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wie gesagt:  
left hat den Wert, der durch  $a_1a_2 \cdots a_p$  binär kodiert wird

## TM $\rightarrow$ WHILE (2)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wie gesagt:  
left hat den Wert, der durch  $a_1a_2 \cdots a_p$  binär kodiert wird
- Wir wollen auf (die Binärokodierung von) left wie auf einen **Stapel** (Keller, Stack) zugreifen:

## TM $\rightarrow$ WHILE (2)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wie gesagt:  
left hat den Wert, der durch  $a_1a_2 \cdots a_p$  binär kodiert wird
- Wir wollen auf (die Binärkodierung von) left wie auf einen **Stapel** (Keller, Stack) zugreifen:
  - **Pop:** der folgende Pseudocode ist in WHILE (und LOOP) implementierbar

```
top := left mod 2  
left := left div 2
```

## TM $\rightarrow$ WHILE (2)

### Behauptung 2: WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wie gesagt:  
left hat den Wert, der durch  $a_1a_2 \cdots a_p$  binär kodiert wird
- Wir wollen auf (die Binärokodierung von) left wie auf einen **Stapel** (Keller, Stack) zugreifen:
  - **Pop**: der folgende Pseudocode ist in WHILE (und LOOP) implementierbar

```
top := left mod 2  
left := left div 2
```
  - **Push**: der folgende Pseudocode ist in WHILE (und LOOP) implementierbar

```
left := left * 2 + top
```
- Auf thgir kann man genauso zugreifen

## TM $\rightarrow$ WHILE (3)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wir haben das Band in zwei Stacks kodiert, mit den Zeichen links und rechts neben dem TM-Kopf an oberster Stelle

## TM $\rightarrow$ WHILE (3)

### Behauptung 2: WHILE-Programme können DTMs simulieren:

- Wir haben das Band in zwei Stacks kodiert, mit den Zeichen links und rechts neben dem TM-Kopf an oberster Stelle
- Die TM-Simulation erfolgt jetzt in einer WHILE-Schleife  
**WHILE** halt  $\neq$  0 **DO**  $P_{\text{Einzelschritt}}$  **END**
- Das Programm  $P_{\text{Einzelschritt}}$  führt einen Schritt aus:
  - `thgir.pop()` liefert Zeichen an Leseposition
  - Durch eine Folge von If-Bedingungen kann man für jede Kombination aus Zustand  $q$  (in state) und gelesenem Zeichen eine Behandlung festlegen
  - Schreiben von Symbol  $a$  durch `thgir.push(a)`
  - Bewegung nach rechts: `left.push(thgir.pop())`
  - Bewegung nach links: `thgir.push(left.pop())`
  - Zustandsänderung durch einfache Zuweisung
  - Anhalten durch Zuweisung `halt := 0`

## TM $\rightarrow$ WHILE (3)

**Behauptung 2:** WHILE-Programme können DTMs simulieren:

Zusammenfassung:

- Natürliche Zahlen simulieren Stacks der Bandsymbole links und rechts
- Berechnungsschritte werden durch einfache Arithmetik implementiert (in LOOP möglich)
- WHILE-Schleife arbeitet Schritte ab, bis die TM hält

Was fehlt noch zum detaillierten Beweis?

- Unsere Stack-Implementierung kann noch nicht mit dem leeren Stack umgehen  $\leadsto$  zusätzliche Tests und Sonderfälle (bei einseitig unendlichem TM-Band asymmetrisch)
- Für größere Arbeitsalphabete würde man statt Binärkodierung eine  $n$ -äre Kodierung verwenden

□



# Zusammenfassung und Ausblick

WHILE-Programme können alle berechenbaren Probleme lösen  
(ein weiteres Indiz für die Church-Turing-These)

LOOP-Programme können fast alle praktisch relevanten Probleme lösen, aber nicht alle berechenbaren Probleme

Online-Simulator für WHILE und LOOP (mit kleinen syntaktischen Verbesserungen wie Kommentaren): <https://tools.iccl.inf.tu-dresden.de/while/>

Beweistechniken: strukturelle Induktion, Widerspruch durch Selbstbezüglichkeit (Busy Beaver), TM mit zwei Stacks simulieren

Was erwartet uns als nächstes?

- Relevantere Probleme
- Reduktionen
- Rice