TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

20. Vorlesung: Resolution (2)

Markus Krötzsch

Professur Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 1. Juli 2024

Der Resolutionsalgorithmus

Resolutionsregel:

$$\frac{\{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\} \quad \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}}{\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}}$$

falls σ allgemeinster Unifikator von $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$ ist

Algorithmus (Skizze):

(1) Bilde Klauselform

(2) Bilde systematisch Resolventen durch Resolution von Varianten bereits abgeleiteter Klauseln

(3) Wiederhole (2), bis entweder $\perp$ erzeugt wird („unerfüllbar“) oder keine neuen Klauseln mehr entstehen[1]

[1] Dieser Fall ist eher ungewöhnlich: Meist entstehen bei erfüllbaren Theorien immer mehr neue Klauseln ohne dass das Verfahren terminiert.

Vollständigkeit und Korrektheit

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ $(i \geq 0)$ die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$

- Korrektheit hatten wir bereits gezeigt
- Vollständigkeit steht noch aus

Jacques Herbrand

12.2.1908 – 27.7.1931

Natasha Artin Brunswick

11.6.1909 - 3.2.2003

Syntax vs. Semantik

Bei Herbrandinterpretationen kann man semantische Elemente (wie sie in Zuweisungen vorkommen) durch syntaktische Elemente (wie sie in Substitutionen vorkommen) ausdrücken:

Lemma: Für jede Herbrandinterpretation $\mathcal{I}$, jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, jeden Term $t \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und jede Formel F gilt:

$$\mathcal{I}, \mathcal{Z}\{x \mapsto t\} \models F \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F\{x \mapsto t\}$$

(ohne Beweis; einfach)

Anmerkung: Man kann ein entsprechendes Resultat auch für Nicht-Herbrand-Interpretationen zeigen. Dann muss man einfach den Term auf der linken Seite durch $t^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}$ ersetzen.

Satz: Ein Satz F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrandmodell hat.

Prädikatenlogisches Schließen mit Aussagenlogik

Herbrand-Expansionen

Die Herbrand-Expansion $HE(F)$ einer Formel $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ in Skolemform ist die Menge:

$$HE(F) := \{G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \mid t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F\}$$

$HE(F)$ ist also die (möglicherweise unendliche) Menge von variablen-freien Sätzen, die in Herbrandmodellen von F gelten müssten.

Herbrand-Expansionen

Die Herbrand-Expansion $HE(F)$ einer Formel $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ in Skolemform ist die Menge:

$$HE(F) := \{G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \mid t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F\}$$

$HE(F)$ ist also die (möglicherweise unendliche) Menge von variablen-freien Sätzen, die in Herbrandmodellen von F gelten müssten.

Quantorenfreie Sätze = aussagenlogische Formeln:

- $HE(F)$ enthält Formeln ohne Variablen, d.h. Boolsche Kombinationen geschlossener Atome
- Geschlossene Atome können unabhängig voneinander wahr oder falsch sein, egal wie ihre genaue Struktur aussieht
- Wir können sie also als „ungewöhnlich benannte“ aussagenlogische Atome auffassen und die gesamte Formel aussagenlogisch interpretieren

$\leadsto$ $HE(F)$ als aussagenlogische Theorie

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- $\mathcal{I}$ ist ein Herbrandmodell von F

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- $\mathcal{I}$ ist ein Herbrandmodell von F
- gdw. $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- $\mathcal{I}$ ist ein Herbrandmodell von F
- gdw. $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$
- gdw. $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$ (Lemma)

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- $\mathcal{I}$ ist ein Herbrandmodell von F
- gdw. $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$
- gdw. $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$ (Lemma)
- gdw. für alle $H \in HE(F)$ gilt $\mathcal{I} \models H$

Gödel, Herbrand, Skolem

Satz von Gödel, Herbrand & Skolem: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen, dass $F = \forall x_1, \ldots, x_n.G$ genau dann ein Herbrandmodell hat, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch erfüllbar ist:

- $\mathcal{I}$ ist ein Herbrandmodell von F
- gdw. $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$
- gdw. $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$ (Lemma)
- gdw. für alle $H \in HE(F)$ gilt $\mathcal{I} \models H$
- gdw. $\mathcal{I}$ als aussagenlogisches Modell für $HE(F)$ angesehen werden kann. $\square$

Satz von Herbrand

Als Korollar der gezeigten Ergebnisse erhalten wir ein wichtiges Resultat:

Satz: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn eine endliche Teilmenge von $HE(F)$ aussagenlogisch unerfüllbar ist.

Satz von Herbrand

Als Korollar der gezeigten Ergebnisse erhalten wir ein wichtiges Resultat:

Satz: Eine Formel F in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn eine endliche Teilmenge von $HE(F)$ aussagenlogisch unerfüllbar ist.

Beweis: Das Kontrapositiv des Satzes von Gödel, Herbrand & Skolem besagt:

Eine Formel F in Skolemform ist genau dann unerfüllbar, wenn $HE(F)$ aussagenlogisch unerfüllbar ist.

Der Satz folgt nun, weil jede unerfüllbare aussagenlogische Formelmenge eine endliche Teilmenge hat, die unerfüllbar ist: Kompaktheit der Aussagenlogik, ohne Beweis

Das Ergebnis kann aus der Vollständigkeit der Verallgemeinerung aussagenlogischer Resolution auf unendliche Modelle gefolgert werden (siehe Formale Systeme, WS 2017/2018, Vorlesung 23): wenn die leere Klausel endlich abgeleitet werden kann, dann nutzt man dazu nur endlich viele Klauseln der Eingabe; wenn die leere Klausel nicht endlich abgeleitet werden kann, dann erhält man aus der unendlichen Menge aller möglichen Ableitungen ein Modell, analog zum endlichen Fall.

□

Prädikatenlogik semi-entscheiden

Das Ergebnis Herbrands ermöglicht bereits einen naiven Algorithmus zur Semi-Entscheidung von Unerfüllbarkeit in der Prädikatenlogik:

Gegeben: Eine Formel F

- Wandle F in Skolemform F' um
- Definiere eine Reihenfolge der Formeln in $HE(F')$: $F_1, F_2, F_3, \ldots$
- Für alle $i \geq 1$:
  - Prüfe ob die endliche Menge $\{F_1, \ldots, F_i\}$ aussagenlogisch unerfüllbar ist
  - Falls ja, dann gib „unerfüllbar“ aus; andernfalls fahre fort

Offenbar ist das kein praktischer Algorithmus, aber er zeigt Semi-Entscheidbarkeit

Vollständigkeit der Resolution

Ansatz

Herbrands Satz liefert uns auch eine Strategie zum Beweis der Vollständigkeit des Resolutionsalgorithmus

Wir wissen bereits:

- Unerfüllbarkeit einer Klauselmenge zeigt sich in der Unerfüllbarkeit ihrer Herbrand-Expansion
- Die Unerfüllbarkeit der Herbrand-Expansion kann man mit aussagenlogischer Resolution beweisen
- Prädikatenlogische Resolution verallgemeinert aussagenlogische Resolution indem wir direkt mit Klauseln arbeiten, die noch Variablen enthalten

Ansatz

Herbrands Satz liefert uns auch eine Strategie zum Beweis der Vollständigkeit des Resolutionsalgorithmus

Wir wissen bereits:

- Unerfüllbarkeit einer Klauselmenge zeigt sich in der Unerfüllbarkeit ihrer Herbrand-Expansion
- Die Unerfüllbarkeit der Herbrand-Expansion kann man mit aussagenlogischer Resolution beweisen
- Prädikatenlogische Resolution verallgemeinert aussagenlogische Resolution indem wir direkt mit Klauseln arbeiten, die noch Variablen enthalten

Frage: Kann man alle Schlüsse, die man auf expandierten Formeln aussagenlogisch erzeugen kann, auch direkt prädikatenlogisch (mit Variablen) erhalten?

Lifting-Lemma

Wir zeigen: Ja, jeder aussagenlogische Schluss (auf der Expansion) kann auf einen prädikatenlogischen Schluss (auf den Klauseln mit Variablen) „angehoben“ werden.

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.[1]

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

[1] Die Verwendung der selben Substitution für K_1' und K_2' ist keine Einschränkung, da wir durch Variantenbildung sicherstellen können, dass K_1 und K_2 keine Variablen gemein haben.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1,\ A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1,\ A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Dann ist σ ein Unifikator für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
Also hat $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ einen allgemeinsten Unifikator θ.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1,\ A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Dann ist σ ein Unifikator für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
Also hat $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ einen allgemeinsten Unifikator θ.

Sei R die Resolvente von K_1 und K_2 bzgl. θ.

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1,\ A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Dann ist σ ein Unifikator für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
Also hat $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ einen allgemeinsten Unifikator θ.

Sei R die Resolvente von K_1 und K_2 bzgl. θ.

Dann enthalten R' und R Instanzen der gleichen Literale, d.h. sie sind von der Form
$R' = \{L_1\sigma, \ldots, L_n\sigma\}$ und $R = \{L_1\theta, \ldots, L_n\theta\}$

Lifting-Lemma: Beweis

Satz (Lifting-Lemma): Seien K_1 und K_2 prädikatenlogische Klauseln mit Grundinstanzen $K_1' = K_1\sigma$ und $K_2' = K_2\sigma$.

Wenn R' eine (aussagenlogische) Resolvente von K_1' und K_2' ist, dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R von K_1 und K_2, welche R' als Grundinstanz hat.

Beweis: Sei $A' \in K_1'$ das (geschlossene) Atom, über das resolviert wurde, d.h. $\neg A' \in K_2'$.

Sei $\mathcal{A}_1 := \{A \mid A \in K_1,\ A\sigma = A'\}$ und $\mathcal{A}_2 := \{A \mid \neg A \in K_2, A\sigma = A'\}$.

Dann ist σ ein Unifikator für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.
Also hat $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ einen allgemeinsten Unifikator θ.

Sei R die Resolvente von K_1 und K_2 bzgl. θ.

Dann enthalten R' und R Instanzen der gleichen Literale, d.h. sie sind von der Form
$R' = \{L_1\sigma, \ldots, L_n\sigma\}$ und $R = \{L_1\theta, \ldots, L_n\theta\}$

Da θ allgemeinster Unifikator ist gibt es λ mit $\sigma = \theta \circ \lambda$ und es gilt:
$R\lambda = \{L_1\theta\lambda, \ldots, L_n\theta\lambda\} = \{L_1\sigma, \ldots, L_n\sigma\} = R'$ $\square$

Vollständigkeit der Resolution (1)

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ ($i \geq 0$) die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$

Vollständigkeit der Resolution (1)

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ ($i \geq 0$) die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$

Beweis (Vollständigkeit): Sei F unerfüllbar

- Dann ist $HE(F)$ unerfüllbar
- Dann gibt es eine (endliche) aussagenlogische Resolutionsableitung von $\bot$ aus $HE(F)$
- Die Ableitung erzeugt eine endliche Folge von Klauseln: $K'_1, K'_2, \ldots, K'_{m-1}, K'_m = \bot$
- Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.
- Für $i = m$ folgt daraus der Satz, denn $K'_m = \bot$ kann nur Grundinstanz von $\bot$ sein, d.h. $\bot \in \mathcal{K}_\ell$ für ein $\ell \geq 0$.

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K_i' ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K_i' ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K_i' \in HE(F)$: in diesem Fall ist K_i' ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K_i' ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K_i' \in HE(F)$: in diesem Fall ist K_i' ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Restlicher Beweis durch Induktion über i:

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K'_i \in HE(F)$: in diesem Fall ist K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Restlicher Beweis durch Induktion über i:

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$
- K'_i ist Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K'_i \in HE(F)$: in diesem Fall ist K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Restlicher Beweis durch Induktion über i:

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$
- K'_i ist Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$
- Laut Hypothese sind K'_a und K'_b also Instanzen von Klauseln K_a und K_b in einer Menge $\mathcal{K}_\ell$

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K'_i \in HE(F)$: in diesem Fall ist K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Restlicher Beweis durch Induktion über i:

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$
- K'_i ist Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$
- Laut Hypothese sind K'_a und K'_b also Instanzen von Klauseln K_a und K_b in einer Menge $\mathcal{K}_\ell$
- Laut Lifting-Lemma ist demnach K'_i ebenfalls die Instanz einer Klausel K_i, die durch Resolution aus K_a und K_b entsteht

Vollständigkeit der Resolution (2)

Beweis (Vollständigkeit): Behauptung: Jede Klausel K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i die in $\mathcal{K}_\ell$ vorkommt für ein $\ell \geq 0$.

Aussage klar für $K'_i \in HE(F)$: in diesem Fall ist K'_i ist Grundinstanz einer Klausel K_i in der Klauselform von F und in $\mathcal{K}_0$

Restlicher Beweis durch Induktion über i:

- Induktionsannahme: Die Aussage gilt für alle $j < i$
- K'_i ist Resolvente zweier Klauseln K'_a und K'_b mit $a, b < i$
- Laut Hypothese sind K'_a und K'_b also Instanzen von Klauseln K_a und K_b in einer Menge $\mathcal{K}_\ell$
- Laut Lifting-Lemma ist demnach K'_i ebenfalls die Instanz einer Klausel K_i, die durch Resolution aus K_a und K_b entsteht
- Diese Resolvente K_i ist also ebenfalls in einer Menge der Form $\mathcal{K}_{\ell'}$ $\square$

Kompaktheit

Die Existenz von vollständigen und korrekten logischen Schließverfahren wie Resolution ist eng verwandt mit einer grundsätzlichen Eigenschaft der Prädikatenlogik:

Satz (Endlichkeitssatz, Kompaktheitssatz): Falls eine unendliche Menge prädikatenlogischer Sätze $\mathcal{T}$ eine logische Konsequenz F hat, so ist F auch Konsequenz einer endlichen Teilmenge von $\mathcal{T}$.

Kompaktheit

Die Existenz von vollständigen und korrekten logischen Schließverfahren wie Resolution ist eng verwandt mit einer grundsätzlichen Eigenschaft der Prädikatenlogik:

Satz (Endlichkeitssatz, Kompaktheitssatz): Falls eine unendliche Menge prädikatenlogischer Sätze $\mathcal{T}$ eine logische Konsequenz F hat, so ist F auch Konsequenz einer endlichen Teilmenge von $\mathcal{T}$.

Beweis: Die gegebene logische Konsequenz ist gleichbedeutend damit, dass $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ unerfüllbar ist.

Laut Resolutionssatz (Vollständigkeit) kann die Unerfüllbarkeit von $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ nach endlich vielen Schritten durch Ableitung der leeren Klausel nachgewiesen werden.

Dabei können nur endlich viele Klauseln aus der Klauselform von $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ verwendet worden sein. Laut Resolutionssatz (Korrektheit) folgt die Konsequenz also bereits aus einer endlichen Teilmenge von $\mathcal{T}$. $\square$

Die Grenzen der Prädikatenlogik

Kompaktheit zeigt uns auch erste Grenzen der Prädikatenlogik auf.

Eine logische Formel F mit zwei freien Variablen x und y drückt den transitiven Abschluss einer binären Relation r aus, wenn in jeder Interpretation $\mathcal{I}$ und für alle $\delta_1, \delta_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$\mathcal{I}, \{x \mapsto \delta_1, y \mapsto \delta_2\} \models F \quad \text{gdw.} \quad \langle \delta_1, \delta_2 \rangle \in (r^{\mathcal{I}})^+$$

Die Grenzen der Prädikatenlogik

Kompaktheit zeigt uns auch erste Grenzen der Prädikatenlogik auf.

Eine logische Formel F mit zwei freien Variablen x und y drückt den transitiven Abschluss einer binären Relation r aus, wenn in jeder Interpretation $\mathcal{I}$ und für alle $\delta_1, \delta_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$\mathcal{I}, \{x \mapsto \delta_1, y \mapsto \delta_2\} \models F \quad \text{gdw.} \quad \langle \delta_1, \delta_2 \rangle \in (r^{\mathcal{I}})^+$$

Satz: Es gibt keine prädikatenlogische Formel, die den transitiven Abschluss einer binären Relation ausdrückt.

Die Grenzen der Prädikatenlogik

Kompaktheit zeigt uns auch erste Grenzen der Prädikatenlogik auf.

Eine logische Formel F mit zwei freien Variablen x und y drückt den transitiven Abschluss einer binären Relation r aus, wenn in jeder Interpretation $\mathcal{I}$ und für alle $\delta_1, \delta_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:

$$\mathcal{I}, \{x \mapsto \delta_1, y \mapsto \delta_2\} \models F \quad \text{gdw.} \quad \langle \delta_1, \delta_2 \rangle \in (r^{\mathcal{I}})^+$$

Satz: Es gibt keine prädikatenlogische Formel, die den transitiven Abschluss einer binären Relation ausdrückt.

Beweis: Angenommen es gäbe so eine Formel F.

Dann ist die folgende unendliche Theorie unerfüllbar:

$$\{ \quad F\{x \mapsto a, y \mapsto b\}, \neg r(a, b), \neg\exists x_1.(r(a, x_1) \wedge r(x_1, b)), \\ \neg\exists x_1, x_2.(r(a, x_1) \wedge r(x_1, x_2) \wedge r(x_2, b)), \ldots \quad \}$$

Aber jede endliche Teilmenge der Theorie ist erfüllbar.
Die Existenz der Theorie würde also dem Endlichkeitssatz widersprechen. □

Zusammenfassung und Ausblick

Die prädikatenlogische Resolution ist ein vollständiges und korrektes Verfahren für die Unerfüllbarkeit logischer Formeln

In gewissem Sinne ist Prädikatenlogik eine Kurzschreibweise für möglicherweise unendliche aussagenlogische Theorien

Was erwartet uns als nächstes?

- Endliche Modelle und Datenbanken
- Datalog
- Gödel

Bildrechte

Folie 4: Fotografie von Natasha Artin Brunswick, 1931, CC-By 3.0

Folie 5: Fotografie von Thomas Artin, 2000, CC-By 3.0