

Theoretische Informatik und Logik

7. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch
Woche vom 8.–14. Juni 2026

Dr. Stephan Mennicke
Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Ist $L_2 \in \text{PSPACE}$ und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch $L_1 \in \text{PSPACE}$.
- Ist L_1 ein PSPACE-schweres Problem, und gilt $L_1 \leq_p L_2$, dann ist auch L_2 ein PSPACE-schweres Problem.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Jedes PSPACE-schwere Problem ist NP-schwer.
- Es gibt kein NP-schweres Problem, welches in PSPACE liegt.
- Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSPACE.
- Es gilt $\text{NP} = \text{PSPACE}$, wenn es ein PSPACE-schweres Problem in NP gibt.
- Wenn $P \neq \text{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-schweres Problem in P.
- Sei L ein PSPACE-vollständiges Problem. Dann gilt $L \in P \iff P = \text{PSPACE}$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass PSPACE unter Komplement, Durchschnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

Wir betrachten das japanische Spiel *Gomoku*, welches von zwei Spielern X und O auf einem 19×19 -Brett gespielt wird. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf das Brett, und derjenige Spieler, der zuerst fünf Steine in einer Reihe (horizontal, vertikal, oder diagonal) gelegt hat, gewinnt. Spieler X beginnt.

Verallgemeinertes Gomoku wird statt auf einem Brett fester Größe auf einem beliebigen $n \times n$ -Brett gespielt. Eine *Position* in diesem Spiel ist eine Belegung der Felder des Spielbretts mit Steinen der Spieler X und O, wie sie in einem wirklichen Spiel auftreten könnte. Sei

$$\mathbf{GM} := \{ \text{enc}(B) \mid B \text{ ist eine Position im verallgemeinerten Gomoku,} \\ \text{in der X eine Gewinnstrategie hat} \},$$

wobei $\text{enc}(B)$ die zeilenweise Kodierung der Position B über einem festen Alphabet ist.

Argumentieren Sie, warum $\mathbf{GM} \in \text{PSPACE}$ gilt.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Quantifizierten Booleschen Formeln (QBFs) sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $\exists p_1. p_1$
- b) $\forall p_1. p_1$
- c) $\exists p_1. \perp$
- d) $\forall p_1. \exists p_2. p_2 \rightarrow p_1$
- e) $\forall p_1. \exists p_2. \forall p_3. (p_1 \vee p_2) \wedge p_3$
- f) $\forall p_1. \forall p_2. \exists p_3. \forall p_4. (p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_4) \vee \neg p_3$