

## Theoretische Informatik und Logik

### 2. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch  
Woche vom 27. April–3. Mai 2026

Dr. Stephan Mennicke  
Sommersemester 2026

#### Aufgabe 1

Wir führen den *if-then-else*-Operator als neuen dreistelligen Operator *ite* wie folgt für drei aussagenlogische Formeln  $F, G, H$  ein:

$$\text{ite}(F, G, H) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

- Stellen Sie die Wahrheitstabelle für den *ite*-Operator am Beispiel der Formel  $\text{ite}(p, q, r)$  für die Atome  $p, q, r$  auf.
- Gibt es für jede aussagenlogische Formel  $F$  eine äquivalente Formel  $F'$ , die neben Atomen ausschließlich den *ite*-Operator verwendet? Begründen Sie Ihre Antwort.

#### Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die Formeln a)–b) die Negationsnormalform und für c)–d) ihre Klauselform. Sind die Formeln erfüllbar/allgemeingültig/unerfüllbar?

- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r))$
- $b \wedge (a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$
- $\neg\left(c \rightarrow ((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))\right)$

#### Aufgabe 3

Eine  $k$ -Färbung für einen (endlichen) Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zuordnung der Knoten von  $G$  zu Werten („Farben“) in  $\{1, \dots, k\}$ , sodass Knoten, die in  $G$  durch eine Kante verbunden sind, nicht denselben Wert zugeordnet bekommen. Formal ist eine totale Funktion  $\chi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  gesucht, sodass  $\chi(u) \neq \chi(v)$  für alle Kanten  $\{u, v\} \in E$  gilt.

Geben Sie für einen Graphen  $G$  und eine natürliche Zahl  $k$  eine aussagenlogische Formel  $F_{G,k}$  an, sodass  $F_{G,k}$  genau dann erfüllbar ist, wenn es eine  $k$ -Färbung von  $G$  gibt.

#### Aufgabe 4

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit *Jonglierpatterns* im Sinne des sogenannten *Siteswaps*. Auf den Seiten der Wikipedia<sup>1</sup> sind diese anschaulich erklärt.

Ein *Jongliermustern* ist eine Folge von  $T \in \mathbb{N}$  positiver ganzer Zahlen  $s_0, s_1, \dots, s_{T-1}$  ( $s_i \geq 0$  für  $0 \leq i < T$ ). Die Zahl  $T$  bezeichnet die *Periode des Musters* und jedes  $s_i$  ( $0 \leq i < T$ ) steht für einen Jonglierwurf, wobei der Zahlenwert angibt, wann der geworfene Gegenstand wieder gefangen wird. Das Muster wird nach  $T$  Zeiteinheiten periodisch fortgesetzt. Gegenstände sind in dieser Aufgabe immer Bälle und wir legen fest, dass die erste Aktion von der rechten Hand ausgeführt wird.

Ein Jongliermuster ist *jonglierbar* wenn es einen Ablauf so beschreibt, dass zu jedem Zeitpunkt genau ein Ball geworfen wird und alle Bälle so in der Luft sind, dass sie sich nicht „in die Quere kommen“. Formal müssen für die Jonglierbarkeit eines Musters die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Zu jedem Zeitpunkt kann höchstens ein Objekt gefangen werden, d. h.

$$|\{k_t \mid 0 \leq t < T \wedge k_t \equiv t + s_t \pmod{T}\}| = T$$

2. Die durchschnittliche Wurfdauer entspricht der Anzahl  $k \in \mathbb{N}$  der Bälle:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} s_t = k$$

- a) Sind die Jongliermuster  $\pi_1 = 4, 2, 3, 1$  und  $\pi_2 = 3, 1, 2$  jonglierbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
- b) Finden Sie ein Jongliermuster der Periode  $T = 5$  mit  $k = 2$  Bällen, wobei jeder Wurf aus  $\{1, 2, 3\}$  kommen soll. Wieviele solche Jongliermuster existieren?
- c) Lösen Sie die Aufgabe b) mit Hilfe von Z3. Welche Atome und Formeln benötigen Sie?
- d) Gibt es auch dann noch Lösungen, wenn Sie keinen Wurf der Dauer 1 erlauben und der erste Wurf Dauer 3 hat?

---

<sup>1</sup><https://de.wikipedia.org/wiki/Siteswap>

**Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)**

- S2) Sei  $F$  eine Formel, in der ausschließlich der Junktor  $\rightarrow$  verwendet wird. Zeigen Sie, dass wenn  $w(p_i) = 1$  für alle  $p_i \in \text{Var}(F)$  ist, dann ist auch  $w(F) = 1$ .
- S3) Es sei  $G$  eine aussagenlogische Formel. Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $G$  äquivalent zu einer Formel  $H$  ist, die ausschließlich den Junktor  $\rightarrow$  verwendet.
- S4) Prüfen Sie mittels Resolution die folgenden Formeln jeweils auf Erfüllbarkeit:

$$a \wedge \left( (c \wedge b) \wedge ((\neg c \vee \neg b) \vee (a \wedge (c \wedge b))) \right)$$

$$(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee d) \wedge (\neg c \vee d) \wedge (c \vee \neg d)$$