

Theoretische Informatik und Logik

9. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch
Woche vom 29. Juni bis 5. Juli 2026

Dr. Stephan Mennicke
Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Formalisieren Sie Bertrand Russells Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

als eine prädikatenlogische Formel und zeigen Sie, dass diese unerfüllbar ist.

Nehmen Sie dafür an, dass der Barbier durch eine Konstante b repräsentiert wird und dass für die Relation „ x rasiert y “ durch ein zweistelliges Prädikatensymbol r ausgedrückt wird.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Formeln eine äquivalente bereinigte Formel in Pränexform.

- a) $\forall x.(p(x, x) \leftrightarrow \neg \exists y.q(x, y))$
- b) $\forall x.p(f(x, x)) \vee (q(x, z) \rightarrow \exists x.p(g(x, y, z)))$
- c) $\forall x.p(x) \wedge (\forall y.\exists x.q(x, g(y)) \rightarrow \exists y.(r(f(y)) \vee \neg q(y, x)))$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Formeln eine erfüllbarkeitsäquivalente bereinigte Formel in Skolemform.

- a) $p(x) \vee \exists x.q(x, x) \vee \forall x.p(f(x))$
- b) $\forall x.\exists y.q(f(x), g(y)) \wedge \forall x.(p(x, y, y) \vee q(h(y), x))$
- c) $\forall x.\forall x.(p(x) \leftrightarrow q(x, x)) \vee \exists x.\forall y.(q(x, g(y, z)) \wedge \exists z.q(z, z))$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass Allgemeingültigkeit von Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe in Skolemform entscheidbar ist.

Aufgabe 5

Begründen Sie folgende Aussagen:

- a) Ist $P = NP$, dann ist $NP = coNP$.
- b) Ist $P \neq NP$, dann gilt $P \neq coNP$, $L \neq NP$ und $P \neq PSPACE$.

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe S

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.
- b) Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.
- c) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.
- d) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.
- e) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Aufgabe T

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

- a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
- b) Grüne Drachen können fliegen.
- c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
- d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.