TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur für Computational Logic

FORMALE SYSTEME

18. Vorlesung: Turingmaschinen

Sebastian Rudolph

TU Dresden, 6. Januar 2025

Rückblick

Zusammenfassung Typ 2

Kontextfreie Sprachen

- Beschrieben durch kontextfreie Grammatiken und Kellerautomaten
- Können mehrdeutig sein
- Können deterministisch sein (beschrieben durch deterministische Kellerautomaten und **LR**(k)-Grammatiken)
- Wortproblem polynomiell, im deterministischen Fall sogar linear
- Sonstige Entscheidungsprobleme meist viel schwerer als bei regulären Sprachen
- Nicht unter allen Operationen abgeschlossen

Turingmaschinen

Kellerautomaten erweitern

Unmittelbar denkbare Erweiterungen von Kellerautomaten:

- Verwendung von zwei oder mehr Kellern
- Verwendung von FIFO-Speichern (Warteschlange)
- Verwendung einer endlichen Menge von Zählern
- ...

All diese Modelle erkennen genau die Typ-0-Sprachen!

Kellerautomaten erweitern

Unmittelbar denkbare Erweiterungen von Kellerautomaten:

- Verwendung von zwei oder mehr Kellern
- Verwendung von FIFO-Speichern (Warteschlange)
- Verwendung einer endlichen Menge von Zählern
- …

All diese Modelle erkennen genau die Typ-0-Sprachen!

Das klassische Automatenmodell
für diese Sprachklasse ist die Turingmaschine.

Alan Turing (publ. dom.)

Kellerautomaten erweitern

Unmittelbar denkbare Erweiterungen von Kellerautomaten:

- Verwendung von zwei oder mehr Kellern
- Verwendung von FIFO-Speichern (Warteschlange)
- Verwendung einer endlichen Menge von Zählern
- ...

All diese Modelle erkennen genau die Typ-0-Sprachen!

Das klassische Automatenmodell
für diese Sprachklasse ist die Turingmaschine.

Was kann diese Art von Automaten?

Alan Turing (publ. dom.)

Kellerautomaten erweitern

Unmittelbar denkbare Erweiterungen von Kellerautomaten:

- Verwendung von zwei oder mehr Kellern
- Verwendung von FIFO-Speichern (Warteschlange)
- Verwendung einer endlichen Menge von Zählern
- …

All diese Modelle erkennen genau die Typ-0-Sprachen!

Das klassische Automatenmodell
für diese Sprachklasse ist die Turingmaschine.

Was kann diese Art von Automaten?
Alles, was überhaupt auf Computern machbar ist!

Alan Turing (publ. dom.)

Church-Turing-These:
Die Turingmaschine kann alle Funktionen berechnen, die intuitiv berechenbar sind.

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

- TMs haben eine endliche Steuerung (wie bei NFA und PDA).

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

- TMs haben eine endliche Steuerung (wie bei NFA und PDA).
- Es gibt eine unbeschränkte Menge an Speicher (wie bei PDA).

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

- TMs haben eine endliche Steuerung (wie bei NFA und PDA).
- Es gibt eine unbeschränkte Menge an Speicher (wie bei PDA).
- Die TM kann in jedem Schritt ein Zeichen aus dem Speicher lesen und eines schreiben (wie bei PDA).

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

- TMs haben eine endliche Steuerung (wie bei NFA und PDA).
- Es gibt eine unbeschränkte Menge an Speicher (wie bei PDA).
- Die TM kann in jedem Schritt ein Zeichen aus dem Speicher lesen und eines schreiben (wie bei PDA).
- Der Lese-/Schreibzugriff ist an jeder beliebigen Speicheradresse möglich (im Gegensatz zu PDA).

  Zur praktischen Implementierung speichert die TM die aktuelle Adresse und kann diese in jedem Schritt um eins erhöhen oder verringern.

Turingmaschinen – Grundideen

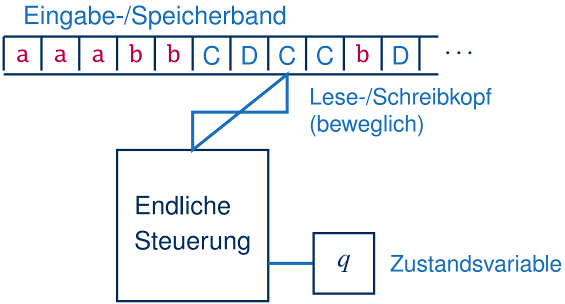
Wesentliche Designentscheidungen
bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

- TMs haben eine endliche Steuerung (wie bei NFA und PDA).
- Es gibt eine unbeschränkte Menge an Speicher (wie bei PDA).
- Die TM kann in jedem Schritt ein Zeichen aus dem Speicher lesen und eines schreiben (wie bei PDA).
- Der Lese-/Schreibzugriff ist an jeder beliebigen Speicheradresse möglich (im Gegensatz zu PDA).

  Zur praktischen Implementierung speichert die TM die aktuelle Adresse und kann diese in jedem Schritt um eins erhöhen oder verringern.
- Zur Vereinfachung wird die Eingabe einfach beim Start in den Speicher übergeben, so dass „Lesen der Eingabe“ und „Lesen des Speichers“ die selbe Operation sind.

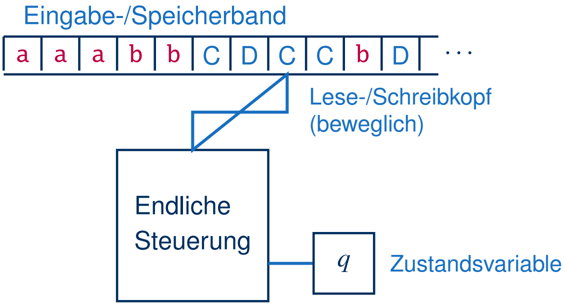
Turingmaschinen – Grundideen (2)

Schematische Darstellung:



Turingmaschinen – Grundideen (2)

Schematische Darstellung:



Übergangsfunktion:

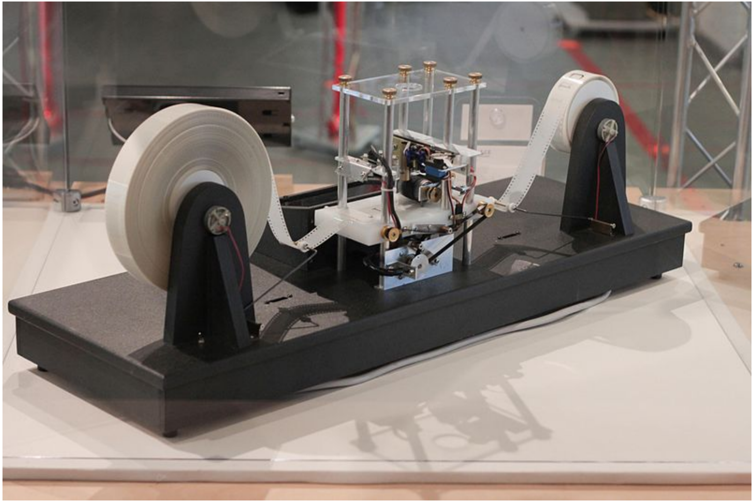
- Eingabe: aktueller Zustand, gelesenes Zeichen
- Ausgabe: neuer Zustand, geschriebenes Zeichen, Änderung Lese-/Schreibadresse (≙ Bewegung Lese-/Schreibkopf)

Speicherzugriff in TMs

Speicherverwaltung:

- Zu jedem Zeitpunkt verwendet die TM endlich viele Speicherzellen.
- Speicherzellen können als „Band“ von links nach rechts gesehen werden.
- Lese-/Schreibkopf kann frei auf dem Band bewegt werden (pro Schritt um eine Zelle nach links oder rechts).
- Am linken Rand kann der Kopf nicht weiter nach links bewegt werden.
- Am rechten Rand des Speichers kann der Kopf nach rechts bewegt werden: Dann wird dort eine neue Speicherzelle mit dem Inhalt $\llcorner\!\lrcorner$ (Leerzeichen, Blank) angefügt.

Alternative Vorstellung: Der Speicher ist ein einseitig unendlich langes Band, auf dem am Anfang nur eine (endliche) Eingabe steht, gefolgt von unendlich vielen leeren Zellen ($\llcorner\!\lrcorner$).



Modell einer Turingmaschine, (c) Foto: Rocky Acosta, 2012, CC-By 3.0

Definition TM

Eine (deterministische) Turingmaschine (DTM) ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q: endliche Menge von Zuständen
- Σ: Eingabealphabet
- Γ: Arbeitsalphabet mit $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{\textvisiblespace\}$
- δ: Übergangsfunktion, eine partielle Funktion

$$Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

- q_0: Startzustand $q_0 \in Q$
- F: Menge von akzeptierenden Endzuständen $F \subseteq Q$

Dabei bedeutet $\delta(q, a) = \langle p, b, D \rangle$:

„Liest die TM in Zustand q unter dem Lese-/Schreibkopf ein a, dann wechselt sie zu Zustand p, überschreibt das a mit b und verschiebt den Lese-/Schreibkopf gemäß $D \in \{L, R, N\}$ (nach links, nach rechts, gar nicht)."

Beispiel (1)

Wir konstruieren eine TM mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}\}$, welche Wörter der Form $\mathtt{0}^{2^i}$ für $i \geq 0$ akzeptiert. (Also Ketten von $\mathtt{0}$ akzeptiert, deren Länge eine Zweierpotenz ist.)

Beispiel (1)

Wir konstruieren eine TM mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{0}\}$, welche Wörter der Form $\mathtt{0}^{2^i}$ für $i \geq 0$ akzeptiert. (Also Ketten von $\mathtt{0}$ akzeptiert, deren Länge eine Zweierpotenz ist.)

Arbeitsweise:

(1) Laufe von links nach rechts über die Eingabe und ersetze dabei jede zweite $\mathtt{0}$ durch X.

(2) Falls insgesamt nur eine $\mathtt{0}$ gefunden wird, akzeptiere.

(3) Falls eine andere ungerade Zahl an $\mathtt{0}$ gefunden wird, verwirf.

(4) Laufe zurück zum Anfang des Bandes.

(5) Wiederhole die Schritte ausgehend von (1).

Beispiel (2)

Wir können TMs in Diagrammen darstellen:

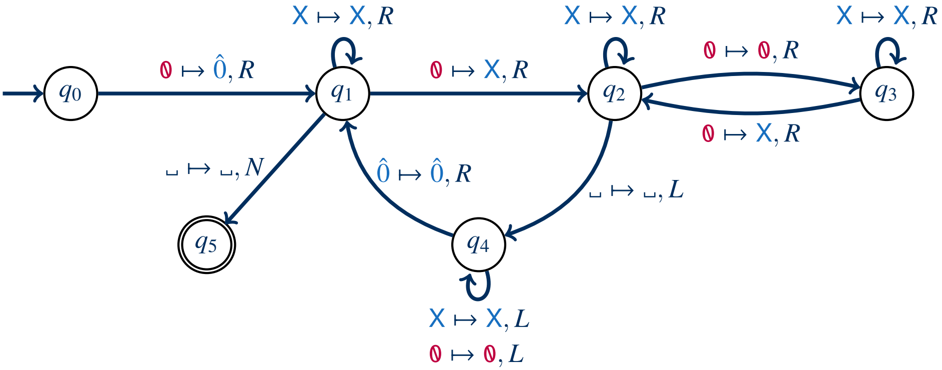
Ein Pfeil von q_1 nach q_2 mit Beschriftung $s_1 \mapsto s_2, D$ bedeutet $\delta(q_1, s_1) = \langle q_2, s_2, D\rangle$.

Beispiel (2)

Wir können TMs in Diagrammen darstellen:

Ein Pfeil von q_1 nach q_2 mit Beschriftung $s_1 \mapsto s_2, D$ bedeutet $\delta(q_1, s_1) = \langle q_2, s_2, D\rangle$.

Übergangsrelation zum Beispiel:



Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N \rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N \rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R \rangle$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N \rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\quad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R \rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\quad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N\rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\quad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R\rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\quad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$
  - falls $v = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$. $\quad w\,q\,a \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N\rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\qquad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R\rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\qquad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$
  - falls $v = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,␣$. $\qquad w\,q\,a \vdash wb\,r\,␣$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, L\rangle$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N\rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\quad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R\rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\quad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$
  - falls $v = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,␣$. $\quad w\,q\,a \vdash wb\,r\,␣$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, L\rangle$
  - falls $w = xc$ mit $c \in \Gamma$, dann $w\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$; $\quad xc\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ eine DTM.

Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N\rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\quad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R\rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\quad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$
  - falls $v = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$. $\quad w\,q\,a \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, L\rangle$
  - falls $w = xc$ mit $c \in \Gamma$, dann $w\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$; $\quad xc\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$
  - falls $w = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash r\,bv$. $\quad q\,av \vdash r\,bv$

Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\rangle$ eine DTM.

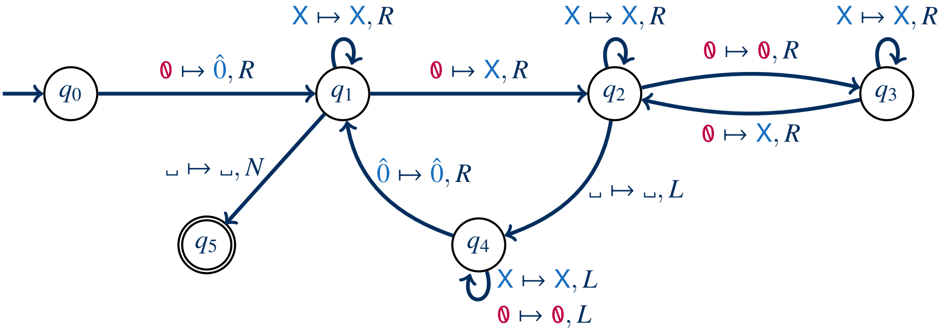
Eine Konfiguration von $\mathcal{M}$ ist ein Wort $w\,q\,v \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $w\,q\,av$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$.
Die Übergangsrelation $\vdash$ ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N\rangle$, dann $w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$. $\qquad w\,q\,av \vdash w\,r\,bv$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R\rangle$
  - falls $v \neq \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$; $\qquad w\,q\,av \vdash wb\,r\,v$
  - falls $v = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$. $\qquad w\,q\,a \vdash wb\,r\,\llcorner\!\lrcorner$
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, L\rangle$
  - falls $w = xc$ mit $c \in \Gamma$, dann $w\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$; $\qquad xc\,q\,av \vdash x\,r\,cbv$
  - falls $w = \epsilon$, dann $w\,q\,av \vdash r\,bv$. $\qquad q\,av \vdash r\,bv$

Mit $\vdash^*$ bezeichnen wir den reflexiven, transitiven Abschluss von $\vdash$.

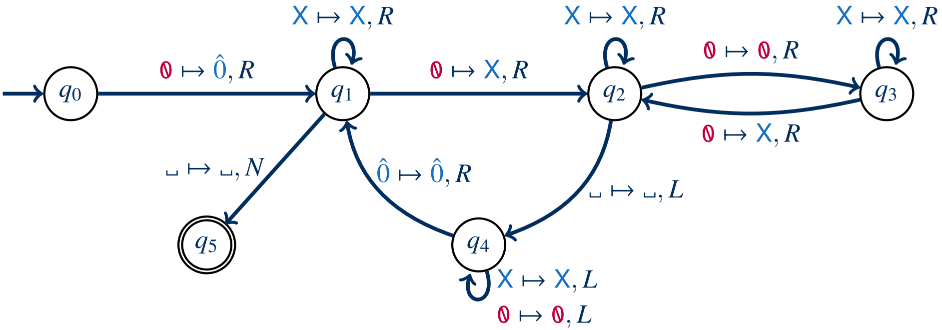
Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup$

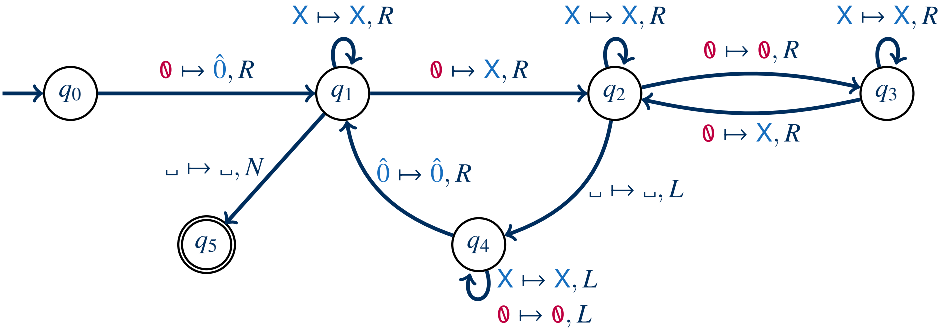
Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $0000\sqcup$:

$q_0\, 0000\sqcup \vdash \hat{0}\, q_1\, 000\sqcup$

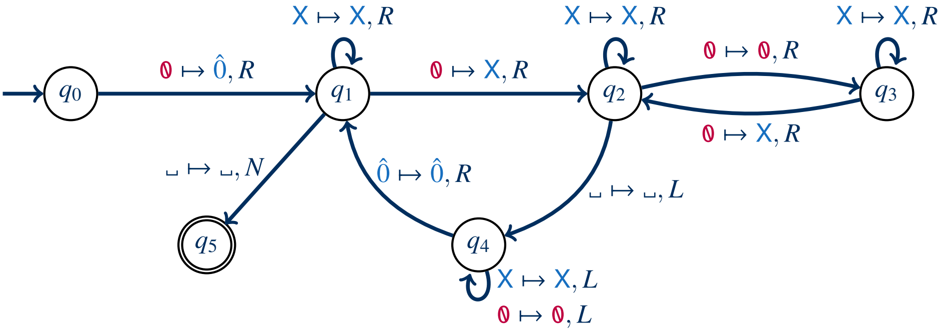
Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $0000\sqcup$:

$q_0\, 0000\sqcup \vdash \hat{0}\, q_1\, 000\sqcup \vdash \hat{0}X\, q_2\, 00\sqcup$

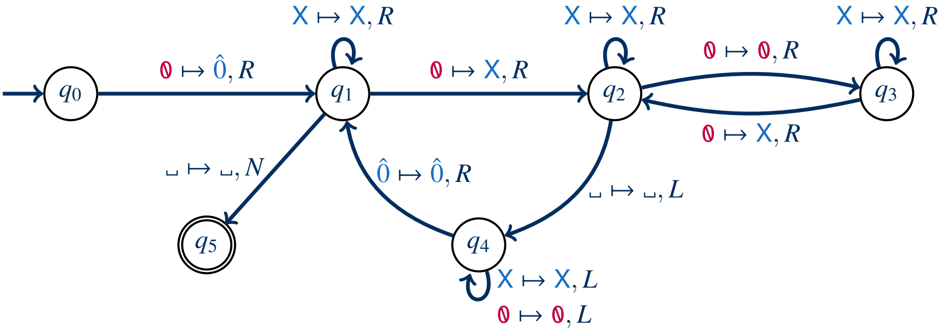
Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von 0000␣:

$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}\ q_2\ \mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}\mathtt{0}\ q_3\ \mathtt{0}\sqcup$

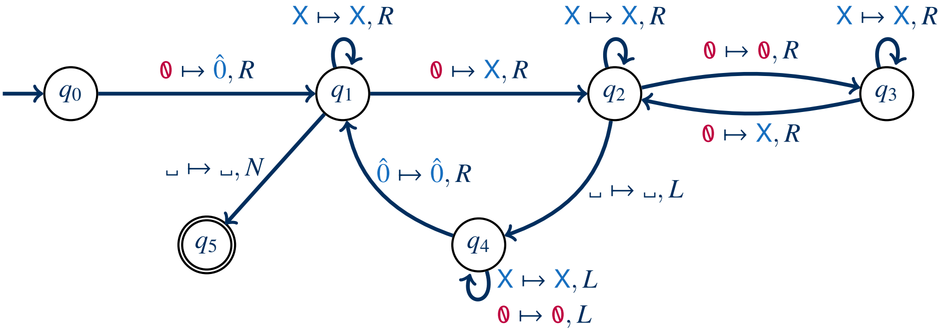
Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

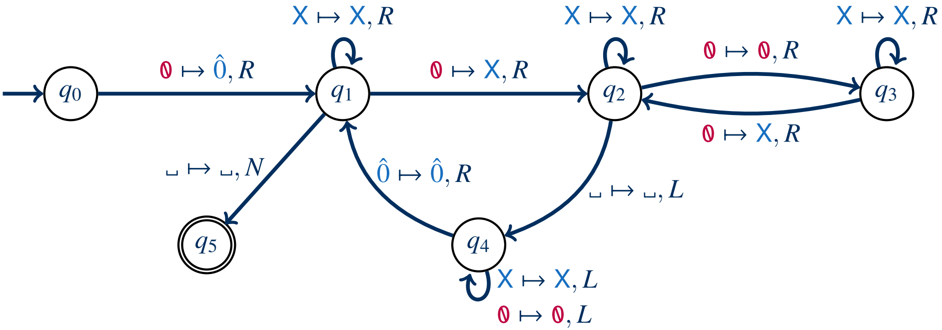
$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X}\ q_2\ \mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\ q_3\ \mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0X}\ q_2\ \sqcup$

Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von 0000␣:

$q_0\ 0000\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ 000\sqcup \vdash \hat{0}X\ q_2\ 00\sqcup \vdash \hat{0}X0\ q_3\ 0\sqcup \vdash \hat{0}X0X\ q_2\ \sqcup \vdash \hat{0}X0\ q_4\ X\sqcup$

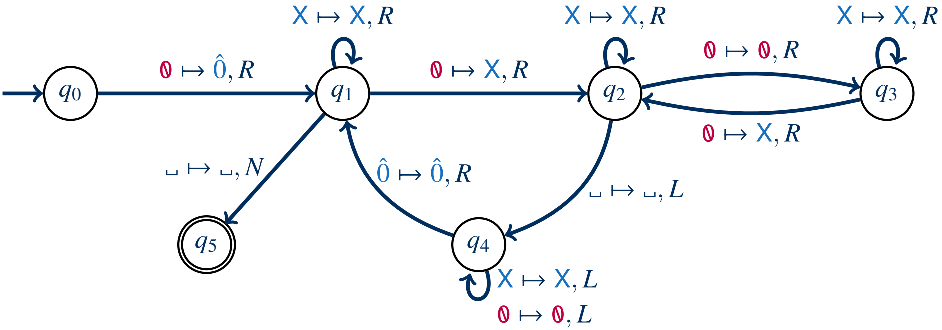


Übergänge bei Eingabe von $0000\sqcup$:

$q_0\,0000\sqcup \vdash \hat{0}\,q_1\,000\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}\,q_2\,00\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}0\,q_3\,0\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}0\mathsf{X}\,q_2\,\sqcup \vdash \hat{0}\mathsf{X}0\,q_4\,\mathsf{X}\sqcup \vdash$

$\hat{0}\mathsf{X}\,q_4\,0\mathsf{X}\sqcup \vdash \hat{0}\,q_4\,\mathsf{X}0\mathsf{X}\sqcup \vdash q_4\,\hat{0}\mathsf{X}0\mathsf{X}\sqcup$

Beispiel (3)

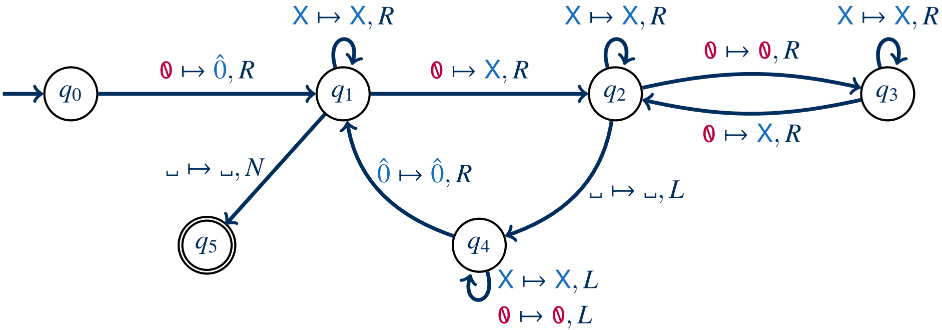


Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

$q_0\,\mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\,q_1\,\mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}X\,q_2\,\mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}X\mathtt{0}\,q_3\,\mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{0}X\mathtt{0}X\,q_2\,\sqcup \vdash \hat{0}X\mathtt{0}\,q_4\,X\sqcup \vdash$

$\hat{0}X\,q_4\,\mathtt{0}X\sqcup \vdash \hat{0}\,q_4\,X\mathtt{0}X\sqcup \vdash q_4\,\hat{0}X\mathtt{0}X\sqcup \vdash \hat{0}\,q_1\,X\mathtt{0}X\sqcup$

Beispiel (3)

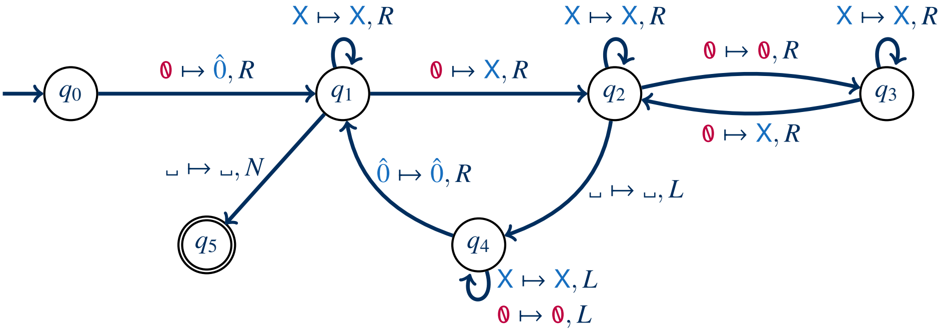


Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X}\ q_2\ \mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\ q_3\ \mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0X}\ q_2\ \sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\ q_4\ \mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{0}\mathtt{X}\ q_4\ \mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_4\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash q_4\ \hat{0}\mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X}\ q_1\ \mathtt{0X}\sqcup$

Beispiel (3)

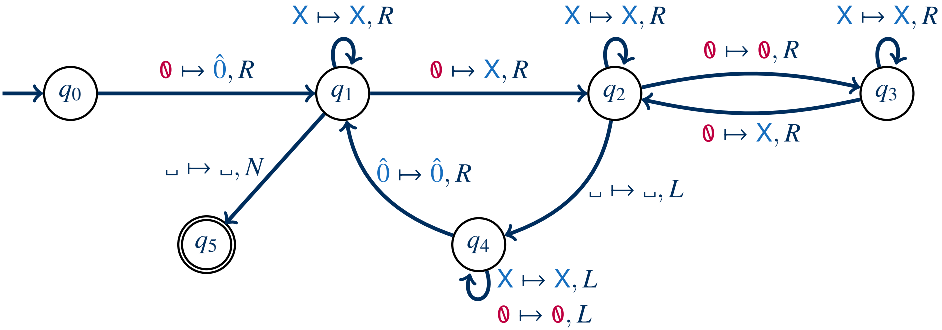


Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

$q_0\,\mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\,q_1\,\mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\,q_2\,\mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\mathtt{0}\,q_3\,\mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\mathtt{0}\mathrm{X}\,q_2\,\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\mathtt{0}\,q_4\,\mathrm{X}\sqcup \vdash$

$\hat{0}\mathrm{X}\,q_4\,\mathtt{0}\mathrm{X}\sqcup \vdash \hat{0}\,q_4\,\mathrm{X}\mathtt{0}\mathrm{X}\sqcup \vdash q_4\,\hat{0}\mathrm{X}\mathtt{0}\mathrm{X}\sqcup \vdash \hat{0}\,q_1\,\mathrm{X}\mathtt{0}\mathrm{X}\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\,q_1\,\mathtt{0}\mathrm{X}\sqcup \vdash \hat{0}\mathrm{X}\mathrm{X}\,q_2\,\mathrm{X}\sqcup$

Beispiel (3)



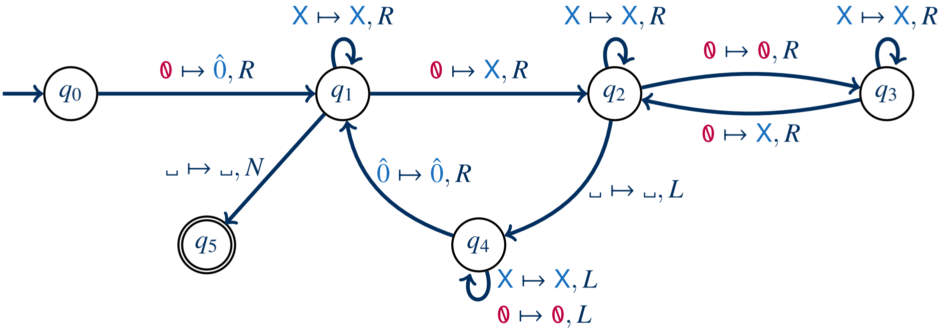
Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X}\ q_2\ \mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\ q_3\ \mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0X}\ q_2\ \sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\ q_4\ \mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{0}\mathtt{X}\ q_4\ \mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_4\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash q_4\ \hat{0}\mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{X}\ q_1\ \mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{0}\mathtt{XX}\ q_2\ \mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{0}\mathtt{XXX}\ q_2\ \sqcup$

Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\llcorner\!\lrcorner$:

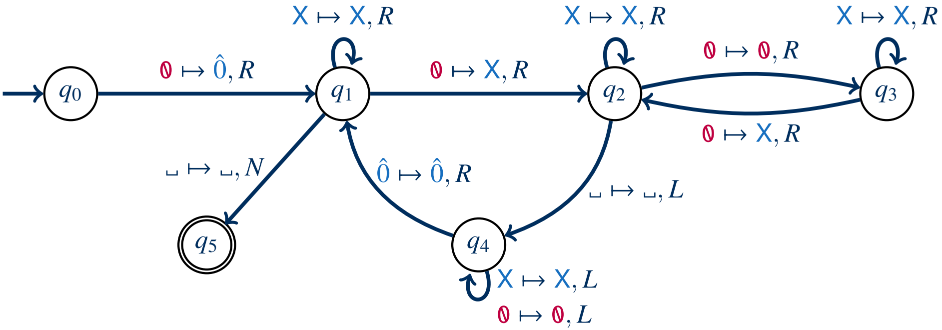
$q_0\,\mathtt{0000}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\,q_1\,\mathtt{000}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X}\,q_2\,\mathtt{00}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\,q_3\,\mathtt{0}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X0X}\,q_2\,\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X0}\,q_4\,\mathtt{X}\llcorner\!\lrcorner \vdash$

$\hat{0}\mathtt{X}\,q_4\,\mathtt{0X}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\,q_4\,\mathtt{X0X}\llcorner\!\lrcorner \vdash q_4\,\hat{0}\mathtt{X0X}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\,q_1\,\mathtt{X0X}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X}\,q_1\,\mathtt{0X}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{XX}\,q_2\,\mathtt{X}\llcorner\!\lrcorner \vdash$

$\hat{0}\mathtt{XXX}\,q_2\,\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{XX}\,q_4\,\mathtt{X}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\mathtt{X}\,q_4\,\mathtt{XX}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\,q_4\,\mathtt{XXX}\llcorner\!\lrcorner \vdash q_4\,\hat{0}\mathtt{XXX}\llcorner\!\lrcorner \vdash$

$\hat{0}\,q_1\,\mathtt{XXX}\llcorner\!\lrcorner$

Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

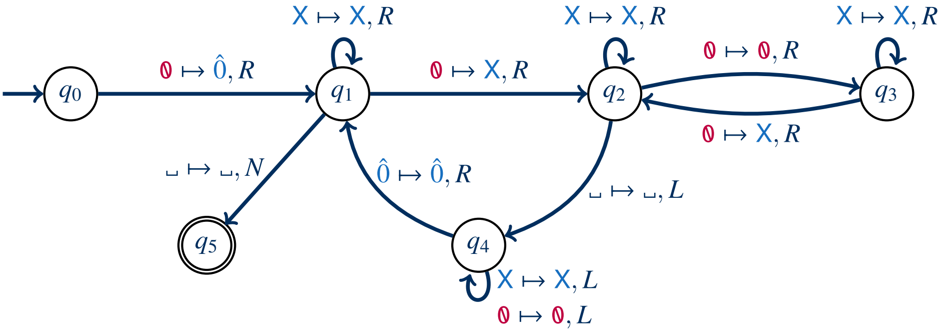
$q_0\ \mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\ q_1\ \mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\ q_2\ \mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0}\ q_3\ \mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0X}\ q_2\ \sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0}\ q_4\ \mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\ q_4\ \mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\ q_4\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash q_4\ \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\ q_1\ \mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\ q_1\ \mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\ q_2\ \mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\ q_2\ \sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\ q_4\ \mathtt{X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\ q_4\ \mathtt{XX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\ q_4\ \mathtt{XXX}\sqcup \vdash q_4\ \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\ q_1\ \mathtt{XXX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\ q_1\ \mathtt{XX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\ q_1\ \mathtt{X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\ q_1\ \sqcup$

Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{0000}\sqcup$:

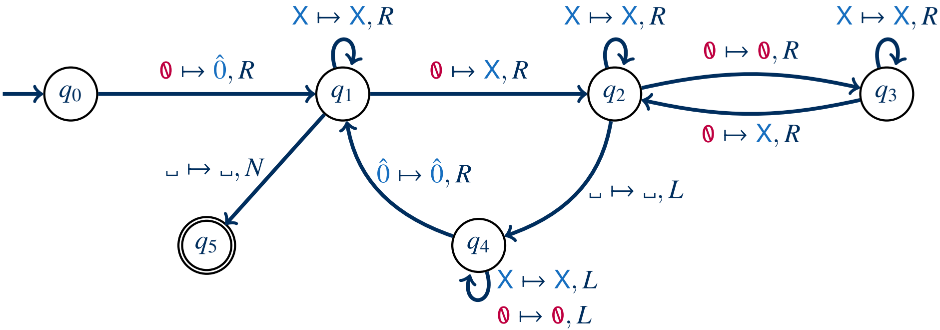
$q_0\,\mathtt{0000}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\,q_1\,\mathtt{000}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\,q_2\,\mathtt{00}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0}\,q_3\,\mathtt{0}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0X}\,q_2\,\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0}\,q_4\,\mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\,q_4\,\mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\,q_4\,\mathtt{X0X}\sqcup \vdash q_4\,\hat{\mathtt{0}}\mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\,q_1\,\mathtt{X0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\,q_1\,\mathtt{0X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\,q_2\,\mathtt{X}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\,q_2\,\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\,q_4\,\mathtt{X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\,q_4\,\mathtt{XX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\,q_4\,\mathtt{XXX}\sqcup \vdash q_4\,\hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\sqcup \vdash$

$\hat{\mathtt{0}}\,q_1\,\mathtt{XXX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{X}\,q_1\,\mathtt{XX}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XX}\,q_1\,\mathtt{X}\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\,q_1\,\sqcup \vdash \hat{\mathtt{0}}\mathtt{XXX}\,q_5\,\sqcup$

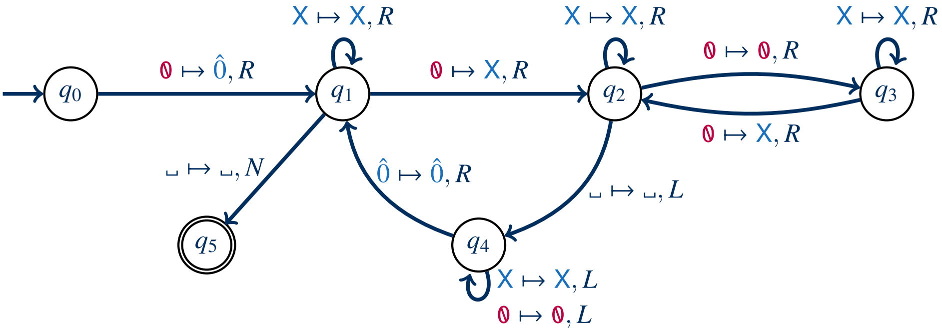
Beispiel (4)



Übergänge bei Eingabe von 000␣:

q_0 000␣

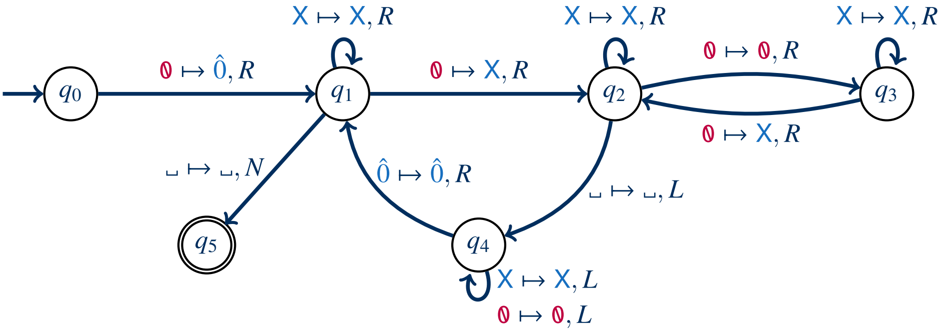
Beispiel (4)



Übergänge bei Eingabe von $\mathtt{000}\llcorner\!\lrcorner$:

$q_0\ \mathtt{000}\llcorner\!\lrcorner \vdash \hat{0}\ q_1\ \mathtt{00}\llcorner\!\lrcorner$

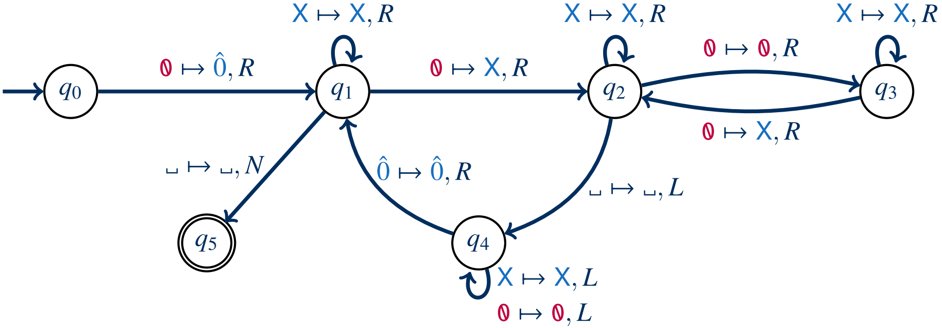
Beispiel (4)



Übergänge bei Eingabe von 000␣:

$q_0\, 000␣ \vdash \hat{0}\, q_1\, 00␣ \vdash \hat{0}X\, q_2\, 0␣$

Beispiel (4)



Übergänge bei Eingabe von $000\sqcup$:

$q_0\, 000\sqcup \vdash \hat{0}\, q_1\, 00\sqcup \vdash \hat{0}X\, q_2\, 0\sqcup \vdash \hat{0}X0\, q_3\, \sqcup$

Quiz: Turingmaschine (1)

Quiz: Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

...

Arbeitsweise einer TM: Läufe

Für Eingabewort w beginnt die TM mit der Startkonfiguration $q_0\, w\llcorner\!\lrcorner$.

Arbeitsweise einer TM: Läufe

Für Eingabewort w beginnt die TM mit der Startkonfiguration $q_0\, w_\sqcup$.

Ein Lauf ist eine maximale Folge von Konfigurationen, die durch die Übergangsrelation in Beziehung stehen.

- Ein Lauf kann endlich sein, wenn es für die Schlusskonfiguration keinen Nachfolger gibt.
- Ein Lauf kann unendlich sein, wenn immer neue Konfigurationen erreichbar sind.

Arbeitsweise einer TM: Läufe

Für Eingabewort w beginnt die TM mit der Startkonfiguration $q_0\, w_{\llcorner\!\lrcorner}$.

Ein Lauf ist eine maximale Folge von Konfigurationen, die durch die Übergangsrelation in Beziehung stehen.

- Ein Lauf kann endlich sein, wenn es für die Schlusskonfiguration keinen Nachfolger gibt.
- Ein Lauf kann unendlich sein, wenn immer neue Konfigurationen erreichbar sind.

Die TM akzeptiert die Eingabe, wenn der (eindeutig bestimmte) Lauf, der mit $q_0\, w_{\llcorner\!\lrcorner}$ beginnt, endlich ist und seine letzte Konfiguration einen Endzustand beinhaltet.

Andernfalls verwirft die TM die Eingabe.

Sprache einer TM

Die Sprache einer TM wird wie erwartet definiert:

Die von einer TM $\mathcal{M}$ erkannte Sprache $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Wörter, die von $\mathcal{M}$ akzeptiert werden.

Sprache einer TM

Die Sprache einer TM wird wie erwartet definiert:

Die von einer TM $\mathcal{M}$ erkannte Sprache $\mathbf{L}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Wörter, die von $\mathcal{M}$ akzeptiert werden.

Es gibt zwei Gründe für die Nichtakzeptanz von Wörtern:

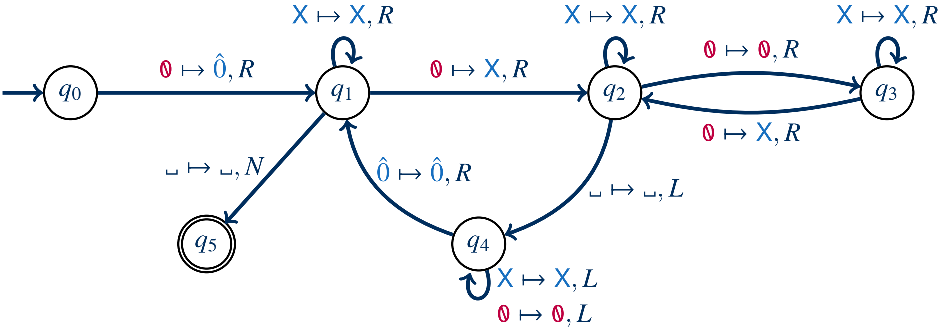
(1) Die TM hält in einem Zustand, der kein Endzustand ist.

(2) Die TM hält nicht (Endlosschleife).

Es ist praktisch, wenn eine TM garantiert hält, da Fall (2) meist nicht sicher erkennbar ist (es könnte sein, dass die TM irgendwann doch noch anhält).

Eine TM ist ein Entscheider, wenn sie bei jeder Eingabe hält.
Wir sagen in diesem Fall, dass die TM die von ihr erkannte Sprache entscheidet.

Beispiel (4)



Diese TM entscheidet die Sprache $\left\{0^{2^i} \;\middle|\; i \geq 0\right\}$.

Quiz: Turingmaschine (2)

Quiz: Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

...

Zusammenfassung und Ausblick

Turingmaschinen (TMs) liefern ein allgemeines Modell der Berechnung.

Die Church-Turing-These besagt, dass jeder Algorithmus in diesem Modell beschrieben werden kann.

Offene Fragen:

- Wie funktionieren nichtdeterministische Turingmaschinen?
- Wo sind die Grenzen der Berechnung mit Turingmaschinen?
- Wie genau hängt das alles mit Sprachen vom Typ 1 und Typ 0 zusammen?