Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
7. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke
Woche vom 1.–7. Dezember 2025 — Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S13) Gegeben sind die Grammatiken G_1 und G_2.

- $G_1 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to aT,\ S \to \varepsilon, T \to Sb\}$
- $G_2 = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}$ und
  $P = \{S \to A,\ S \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$

Geben Sie für jede Grammatik $G \in \{G_1, G_2\}$ jeweils

a) das maximale i an, so dass G eine Typ-i Grammatik ist und

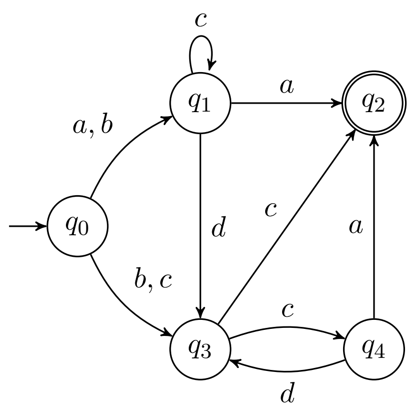
b) das maximale j an, so dass $L(G)$ eine Typ-j Sprache ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

S14) Um mithilfe des Pumping-Lemmas zu zeigen, dass eine Sprache L nicht regulär ist, zeigt man, dass für sie die Aussage des Pumping-Lemmas nicht gilt.
Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i ba^i b \mid i \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 1

Gegeben ist der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \delta, \{q_0\}, \{q_2\})$ mit δ:



Geben Sie für jedes $z \in \{bc, adc, cda, bcdc, acdc\}$ alle Zerlegungen $z = uvw$ mit $u, w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^+$ an, sodass für alle $k \geq 0$ gilt: $uv^kw \in L(\mathcal{M})$. Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2

Gegeben ist das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Welche der folgenden Sprachen L_j über Σ mit $1 \leq j \leq 3$ ist regulär? Beweisen Sie Ihre jeweilige Antwort.

a) $L_1 = \{a^i b^i \mid i \geq 1\}$

b) $L_2 = \{xyx^R \mid x, y \in \Sigma^*, \ |x| \geq 1, |y| \geq 1\}$
Hinweis: Für ein Wort $w = a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k$ ($a_i \in \Sigma$ und $1 \leq i \leq k$) ist das Spiegelwort zu w definiert als $w^R := a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1$.

c) $L_3 = \{a^{i^2} \mid i \geq 1\}$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Grammatik

$$G_0 = (\{S, T, U, V, R\}, \{a, b\}, \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow aSb, S \longrightarrow T, S \longrightarrow R, T \longrightarrow bbT, T \longrightarrow U, \\ U \longrightarrow aaU, U \longrightarrow bbT, V \longrightarrow bSa, R \longrightarrow \varepsilon, R \longrightarrow bSa\}, S)\ .$$

a) Konstruieren Sie eine zu G_0 äquivalente Grammatik G_1, die (außer $S' \longrightarrow \varepsilon$ für Startsymbol S') keine weiteren Regeln der Form $A \longrightarrow \varepsilon$ für ein Nichtterminalsymbol A enthält. Erweitern Sie dazu, wenn nötig, die Grammatik G_0 um ein neues Startsymbol S' und entsprechende Regeln.

b) Geben Sie zu G_1 eine äquivalente Grammatik G_2 an, die keine Kettenregeln, also Produktionen der Form $A \longrightarrow B$ mit Nichtterminalsymbolen A, B, enthält.

c) Geben Sie eine Grammatik G_3 in Chomsky-Normalform an mit $L(G_3) = L(G_2) \setminus \{\varepsilon\}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist folgende Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V = \{S, X, M, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$$P = \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow AX, S \longrightarrow AB, X \longrightarrow MB, M \longrightarrow AB, M \longrightarrow AX, A \longrightarrow a, \\ B \longrightarrow a, B \longrightarrow b\}\ .$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die folgenden Wörter w_i zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

a) $w_1 = aaabba$

b) $w_2 = aabbaa$