

Theoretische Informatik und Logik

10. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch
Woche vom 6.–12. Juli 2026

Dr. Stephan Mennicke
Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils einen allgemeinsten Unifikator für die folgenden Unifikationsprobleme, oder begründen Sie, warum kein allgemeinsten Unifikator existiert. Verwenden Sie hierfür den Algorithmus aus der Vorlesung. Dabei sind x, y Variablen und a, b Konstanten.

- a) $\{ f(x) \doteq g(x, y), y \doteq f(a) \}$
- b) $\{ f(g(x, y)) \doteq f(g(a, h(b))) \}$
- c) $\{ f(x, y) \doteq x, y \doteq g(x) \}$
- d) $\{ f(g(x), y) \doteq f(g(x), a), g(x) \doteq g(h(a)) \}$

Aufgabe 2

Sei p ein k -stelliges Prädikatssymbol und seien $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ Terme. Ferner sei ϑ eine Substitution. Hierbei bezeichne $\exists[F]$ und $\forall[F]$ jeweils den Existenz- bzw. Allabschluss über alle in F syntaktisch vorkommenden Variablen. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- (a) Falls $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$ unifizierbar sind, so ist folgende Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit allgemeingültig:

$$\exists \left[(s_1 \approx t_1) \wedge \dots \wedge (s_k \approx t_k) \right]$$

- (b) Falls $\exists \left[(s_1 \approx t_1) \wedge \dots \wedge (s_k \approx t_k) \right]$ erfüllbar ist, so sind $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$ unifizierbar.
- (c) Ist ϑ ein Unifikator für $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$, so ist folgende Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit allgemeingültig:

$$\forall \left[(s_1 \vartheta \approx t_1 \vartheta) \wedge \dots \wedge (s_k \vartheta \approx t_k \vartheta) \right]$$

- (d) Ist $\forall \left[(s_1 \vartheta \approx t_1 \vartheta) \wedge \dots \wedge (s_k \vartheta \approx t_k \vartheta) \right]$ allgemeingültig, so ist ϑ ein Unifikator für $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$.
- (e) Ist $\vartheta = \{x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n\}$ ein Unifikator für $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$, so ist folgende Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit allgemeingültig:

$$\forall \left[\left((x_1 \approx u_1) \wedge \dots \wedge (x_n \approx u_n) \right) \rightarrow \left((s_1 \approx t_1) \wedge \dots \wedge (s_k \approx t_k) \right) \right]$$

- (f) Ist $\vartheta = \{x_1 \mapsto u_1, \dots, x_n \mapsto u_n\}$ ein allgemeinsten Unifikator für $p(t_1, \dots, t_k)$ und $p(s_1, \dots, s_k)$, so ist folgende Formel der Prädikatenlogik mit Gleichheit allgemeingültig:

$$\forall \left[\left((s_1 \approx t_1) \wedge \dots \wedge (s_k \approx t_k) \right) \rightarrow \left((x_1 \approx u_1) \wedge \dots \wedge (x_n \approx u_n) \right) \right]$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mittels prädikatenlogischer Resolution folgende Aussagen:

- a) Die Aussage „Der Professor ist glücklich, wenn alle seine Studenten Logik mögen“ hat als Folgerung „Der Professor ist glücklich, wenn er keine Studenten hat“.
- b) In Aufgabe T von Übungsblatt 9 folgt die letzte Aussage (iv) aus den ersten drei (i–iii):
 - (i) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.
 - (ii) Grüne Drachen können fliegen.
 - (ii) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachen ist.
 - (iv) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zur Vereinfachung darf hier angenommen werden, dass alle Individuen Drachen sind.

Aufgabe 4

Gegeben sind die folgenden Formeln in Skolemform.

$$\begin{aligned} F &= \forall x, y, z. p(x, f(y), g(z, x)), \\ G &= \forall x, y. (p(a, f(a, x, y)) \vee q(b)), \end{aligned}$$

wobei a und b Konstanten sind.

- a) Geben Sie die zugehörigen Herbrand-Universen Δ_F und Δ_G an.
- b) Geben Sie je ein Herbrand-Modell an oder begründen Sie, warum kein solches existiert.

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe U

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.
- b) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.
- c) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.
- d) Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.
- e) Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Aufgabe V

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

- a) $\Gamma \models F$.
- b) $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.
- c) $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.
- d) $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.