Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Theoretische Informatik und Logik
8. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 22.–28. Juni 2026 — Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Universum aus verschiedenen Personen und Speisen und ein Prädikat *mag*, so dass $mag(x, y)$ ausdrückt *„x mag y“*.

a) „Übersetzen“ Sie folgende prädikatenlogische Formeln in natürlichsprachlich formulierte Aussagen:

   (a) $\forall x.mag(x, Eiscreme)$.

   (b) $\forall x.\exists y.mag(x, y)$.

   (c) $\forall x.\forall y.mag(x, y) \lor \neg mag(x, y)$.

b) „Übersetzen“ Sie folgende natürlichsprachlich formulierte Aussagen in prädikatenlogische Formeln:

   (a) Tom mag keinen Fisch.

   (b) Jeder, der Pizza mag, mag auch Spaghetti.

   (c) Es gibt niemanden, der alles mag.

Aufgabe 2

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x.\, p(x, x) \land \forall x, y.\, ((p(x, y) \land p(y, x)) \to x \approx y) \land \forall x, y, z.\, ((p(x, y) \land p(y, z)) \to p(x, z))$$

a) $\mathcal{I}_1$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\, (m, n) \mid m < n \,\}$;

b) $\mathcal{I}_2$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\, (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$;

c) $\mathcal{I}_3$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\, (m, n) \mid m \text{ teilt } n \,\}$;

d) $\mathcal{I}_4$ mit Grundmenge Σ^* für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\, (x, y) \mid x \text{ ist Präfix von } y \,\}$;

e) $\mathcal{I}_5$ mit Grundmenge $\mathbf{2}^M$ für eine Menge M und $p^{\mathcal{I}_5} = \{\, (X, Y) \mid X \subseteq Y \,\}$.

Aufgabe 3

a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle

   (a) höchstens drei,

   (b) mindestens drei,

   (c) genau drei

   Elemente in der Grundmenge besitzen.

b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Prädikatensymbol p in jedem Modell als der Graph einer

   (a) injektiven Funktion,

   (b) surjektiven Funktion,

   (c) bijektiven Funktion

   interpretiert wird.

   (Der Graph einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Relation $\{\, (x, y) \in A \times B \mid f(x) = y \,\}$.)

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sind Γ und Γ' Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models F$ auch $\Gamma' \models F$.

b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.

c) Eine prädikatenlogische Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

d) Es gilt

$$\{\, \forall x, y.\, (p(x, y) \to p(y, x)), \forall x, y, z.\, ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \to p(x, z)) \,\} \models \forall x.\, p(x, x).$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für linear beschränkte Turingmaschinen (LBA)

$$\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}} \coloneqq \{\, \mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ ist ein LBA, der } w \text{ akzeptiert} \,\}.$$

ein PSpace-vollständiges Problem ist.

Zur Erinnerung (aus Formale Systeme): Eine linear beschränkte Turingmaschine (linear bounded automaton, LBA) ist eine nichtdeterministische Turingmaschine, die den Lese-/Schreibkopf nicht über das letzte Eingabezeichen hinaus bewegen kann. Versucht sie das, so bleibt der Kopf stattdessen an der letzten Bandstelle stehen.

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

a) die Menge aller Teilformeln;

b) die Menge aller Terme;

c) die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;

d) ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$