Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
9. Übungsblatt

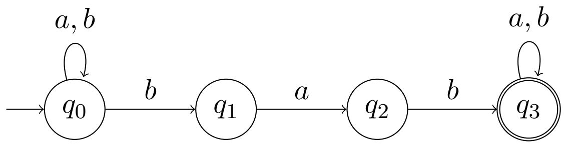
Prof. Markus Krötzsch | Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 15.–21. Dezember 2025 | Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S17) Gegeben ist der folgende NFA $\mathcal{M}_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, \{q_0\}, \{q_3\})$ mit

δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des *Arden*-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\mathcal{M}_1) = L(\alpha)$.

b) Geben Sie einen DFA $\overline{\mathcal{M}_2}$ an, der das Komplement von L akzeptiert, indem Sie aus $\mathcal{M}_1$ einen DFA $\mathcal{M}_2$ für L und aus $\mathcal{M}_2$ anschließend den Komplementautomaten $\overline{\mathcal{M}_2}$ bilden.

S18) a) Gegeben sind die folgenden Grammatiken G_i mit $1 \leq i \leq 4$:

- $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to Sb, S \to a\}, S)$
- $G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to SbS, S \to a\}, S)$
- $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSb, aS \to aB, B \to bB, B \to b\}, S)$
- $G_4 = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to a, A \to b\}, S)$

Geben Sie für jede Grammatik G_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sind die folgenden Sprachen L_i mit $1 \leq i \leq 4$:

- $L_1 = \{a^n b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$
- $L_2 = \{\varepsilon, a\}$
- $L_3 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n > m\}$
- $L_4 = L(\{a\} \circ \{a\}^* \circ \{b\} \circ \{b\}^*) \setminus L_3$

Geben Sie für jede Sprache L_i den maximalen Chomsky-Typ j an. Begründen Sie Ihre Antwort. Die Darlegung der Beweisidee ist ausreichend.

Aufgabe 1

(a) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_0$ für die Sprache

$$L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_0$ für das Wort $w = aaabbcc$ an.

(b) Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}_1$ für die Sprache L' mit

$$L' = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\,, n = 3m\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in $\mathcal{M}_1$ für das Wort $w = aaab$ an.

Aufgabe 2

Gegeben sei der folgende Kellerautomat (PDA) $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{a, b, A, B, \#\}, \delta, \{q_0\}, \{q_f\})$, wobei die Übergangsfunktion gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(q_1, \#)\} \\
\delta(q_1, a, \varepsilon) &= \{(q_1, A)\} \\
\delta(q_1, a, B) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, b, \varepsilon) &= \{(q_1, B)\} \\
\delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) &= \{(q_f, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

und für alle nicht aufgeführten Triple $(q, X, Y) \in Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma$, sei $\delta(q, X, Y) = \varnothing$. Konstruieren Sie aus $\mathcal{M}$ eine kontextfreie Grammatik $G_\mathcal{M}$, sodass $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \mathbf{L}(G_\mathcal{M})$ (vgl. Vorlesung 16).

Spezifizieren Sie ein entsprechendes Startsymbol. Sie dürfen bei Ihrer Konstrukton die Regeln auslassen, die für die Erzeugung der Sprache nicht relevant sind.

Testen Sie Ihre konstruierte Grammatik mit dem Wort $w = aabbba$. Welche Sprache wird von $\mathcal{M}$ erkannt bzw. von der resultierenden Grammatik $G_\mathcal{M}$ generiert?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, wobei $|w|_a$ der Anzahl der Vorkommen von a in w entspricht.

a) Entwerfen Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{M}$ mit $L(\mathcal{M}) = L$, der mittels Finalzustand akzeptiert.

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

c) Wann ist eine Sprache deterministisch kontextfrei? Ist L deterministisch kontextfrei?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten – dabei dürfen Sie den gesamten Stoff und alle Resultate der Vorlesung und Übung verwenden.

a) Es gibt eine Sprache, die von einem nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannt wird, nicht aber von einem deterministischen Kellerautomaten.

b) Mithilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kann bewiesen werden, dass eine Sprache L kontextfrei ist.

c) Für eine beliebige Sprache L gilt: L ist regulär, wenn es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$ gibt, so dass sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ zerlegen lässt in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon, xy^k z \in L$ für alle $k \geq 0$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \left\{w\$w^R : w \in \{a, b\}^*\right\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, \$\}$ deterministisch kontextfrei ist. Hierbei bezeichnet w^R erneut das Wort w in umgekehrter Zeichenfolge.