Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
1. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch | Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 20.–26. Oktober 2025 | Wintersemester 2025/26

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S1) Es sei $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$ und $\Sigma_2 = \{0, 1\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$$\Sigma_1{}^*,\ \ \Sigma_1{}^+,\ \ \Sigma_1{}^2,\ \ \Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*,\ \ \mathcal{P}(\Sigma_1),\ \ \mathcal{P}(\Sigma_1{}^*)$$

S2) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$$\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\},\quad \{a\}\circ\{b\}\circ\{c\},\quad \{a\}\cup\{b\}\circ\{a\}\cup\{b\},\quad \{a\}^*,\quad (\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\})^*,$$
$$(\{a\}\circ\{b\}\circ\{c\})^*,\quad \{a\}\cup\{a\}^*\circ\{b\},\quad (\{0\}\cup\{1\})^*,\quad (\{1\}\cup\{1\}\circ\{0\})^*,$$
$$(\{0\}\cup\{1\})^*\circ\{0\}\circ\{0\}\circ(\{0\}\cup\{1\})^*$$

Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet Σ und die Sprachen $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die Operationen $\cup$, $\circ$ und * monoton sind, d.h. für $L_1 \subseteq L_3$ und $L_2 \subseteq L_4$ gilt:

a) $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4$

b) $L_1 \circ L_2 \subseteq L_3 \circ L_4$

c) $L_1{}^* \subseteq L_3{}^*$

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind L, L_1, L_2, L_3 beliebige Sprachen.

a) $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3, \quad L_1 \circ (L_2 \cap L_3) = (L_1 \circ L_2) \cap (L_1 \circ L_3)$

b) $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$

c) $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$

d) $\emptyset^* = \{\varepsilon\}, \quad (\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*, \quad (L^*)^* = L^*$

e) $(L_1{}^* \cup L_2{}^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$

f) $L \circ L^* = L^+, \quad L^* \circ L^* = L^*, \quad L^* \cup L = L^*$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Grammatik $G = \langle V, \Sigma, P, S\rangle$ mit $V = \{S, B\}, \Sigma = \{a, b, c\}$ und $P = \{S \to aSBc,\ S \to abc,\ cB \to B,\ cB \to Bc,\ bB \to bb\}$.

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie drei Wörter w der Sprache $L(G)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Gilt $\varepsilon \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$.

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Gegeben sind die Grammatiken G_k mit $1 \le k \le 4$:

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1\rangle$ mit $V_1 = \{S_1, T\}$ und
  $P_1 = \{S_1 \to aT,\ S_1 \to \varepsilon, T \to S_1 b\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2\rangle$ mit $V_2 = \{S_2, A, B\}$ und
  $P_2 = \{S_2 \to S_2 A S_2,\ S_2 \to S_2 B B S_2,\ S_2 \to \varepsilon,\ A \to a,\ B \to b\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3\rangle$ mit $V_3 = \{S_3, A, B\}$ und
  $P_3 = \{S_3 \to A,\ S_3 \to \varepsilon,\ A \to ab,\ A \to aBb,\ aB \to aaBb,\ aB \to a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4\rangle$ mit $V_4 = \{S_4, T\}$ und
  $P_4 = \{S_4 \to aS_4b,\ S_4 \to aTb,\ S_4 \to \varepsilon,\ aTb \to T,\ aTb \to S_4\}$.

a) Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken G_k das maximale i an, so dass G_k eine Grammatik vom Typ i ist.

b) Beschreiben Sie $L(G_k)$ in einer geeigneten Form, z.B. mittels einer Mengennotation.

Aufgabe 5

a) Man gebe eine Grammatik für die Menge aller korrekt geschachtelten Klammerausdrücke bestehend aus den Klammern (,), [,], {, } an. (Beispiele: ([( )]) { [ ] } ist korrekt geschachtelt, ([ ) und ([ ] } [ ] jedoch nicht.)

b) Man gebe eine Ableitung des korrekten Klammerausdrucks { ( ) ([ ]) } an.