2 Rekursive Funktionen

2.1 Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

b) Eine Relation R ist partiell entscheidbar gdw. R rekursiv aufzählbar ist.

c) Ist R nicht entscheidbar, so ist R oder $\bar{R}$ nicht partiell entscheidbar.

d) Wenn $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ partiell entscheidbar ist, dann auch $\bar{R} = (\Sigma^*)^n \backslash R$

2.2 Primitiv rekursive Funktionen

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen
   (1) $\mathit{Prod}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\mathit{Prod}(x, y) = x * y$ und
   (2) $\mathit{Moddiff}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathit{Moddiff}(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & x < y \\ x - y & x \geqslant y \end{cases}$$

   primitiv rekursiv sind.

2.3 Partiell rekursive Funktionen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathit{Partdiff}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\mathit{Partdiff}(x, y) = \begin{cases} x - y & x \geqslant y \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

   partiell rekursiv ist, indem Sie zeigen, dass die Funktion für die definierten Werte primitiv rekursiv ist.

2.4 Berechnungsstärke verschiedener Modelle

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind LOOP-berechenbar.

b) Ist eine Funktion f nicht LOOP-berechenbar, dann ist f nicht total und auch keine berechenbare Funktion.

c) Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch μ-rekursiv.

d) Es gibt Funktionen, die nicht berechenbar sind.

e) Alle Relationen sind entscheidbar.

2.5 Beispiele für das PKP

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und seien A und B Listen von jeweils 3 Zeichenketten. Hat das PKP für die folgenden Fälle jeweils eine Lösung?

a)

	Liste A	Liste B
i	w_i	x_i
1	1	111
2	10111	10
3	10	0

b)

	Liste A	Liste B
i	w_i	x_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011