TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

16. Vorlesung: Logisches Schließen – Unentscheidbarkeit

Hannes Straß

Folien: © Markus Krötzsch, https://iccl.inf.tu-dresden.de/web/TheoLog2017**, CC BY 3.0 DE**

TU Dresden, 13. Juni 2022

Schließen ist schwer

Erinnerung: Aus F folgt G genau dann, wenn alle Modelle von F auch Modelle von G sind.

- Es ist nicht offensichtlich, wie man das überprüfen sollte, denn es gibt unendlich viele Modelle.
- Ebenso schwer erscheinen die gleichwertigen Probleme der Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit.

Schließen ist schwer

Erinnerung: Aus F folgt G genau dann, wenn alle Modelle von F auch Modelle von G sind.

- Es ist nicht offensichtlich, wie man das überprüfen sollte, denn es gibt unendlich viele Modelle.
- Ebenso schwer erscheinen die gleichwertigen Probleme der Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit.

Intuition: Prädikatenlogisches Schließen ist unentscheidbar.

Wie kann man das beweisen?

Schließen ist schwer

Erinnerung: Aus F folgt G genau dann, wenn alle Modelle von F auch Modelle von G sind.

- Es ist nicht offensichtlich, wie man das überprüfen sollte, denn es gibt unendlich viele Modelle.
- Ebenso schwer erscheinen die gleichwertigen Probleme der Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit.

Intuition: Prädikatenlogisches Schließen ist unentscheidbar.

Wie kann man das beweisen?

Durch Reduktion eines bekannten unentscheidbaren Problems, z.B.

- Halteproblem
- Postsches Korrespondenzproblem
- Äquivalenzproblem kontextfreier Sprachen
- ...

Unentscheidbarkeit (1)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis: Durch Reduktion vom CFG-Schnittproblem:

Gegeben: Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
Frage: Gibt es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$?

Unentscheidbarkeit (1)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis: Durch Reduktion vom CFG-Schnittproblem:

> **Gegeben:** Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
> **Frage:** Gibt es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$?

Idee: Wir kodieren Wörter in der Prädikatenlogik als Ketten von binären Relationen.

Unentscheidbarkeit (1)

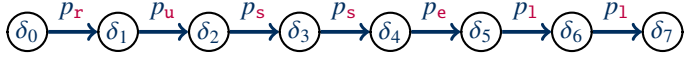
Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis: Durch Reduktion vom CFG-Schnittproblem:

> **Gegeben:** Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
> **Frage:** Gibt es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$?

Idee: Wir kodieren Wörter in der Prädikatenlogik als Ketten von binären Relationen.

Zum Beispiel würde das Wort `russell` in einer Interpretation $\mathcal{I}$ wie folgt aussehen:



Diese Skizze soll bedeuten, dass z.B. $\langle \delta_2, \delta_3 \rangle, \langle \delta_3, \delta_4 \rangle \in p_{\mathtt{s}}^{\mathcal{I}}$.
Wir verwenden ein binäres Prädikatensymbol $p_{\mathtt{a}}$ für jedes Alphabetssymbol `a`.

Unentscheidbarkeit (2)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Zusätzlich verwenden wir binäre Prädikatensymbole p_{A} für jedes Nichtterminalsymbol A.

Unentscheidbarkeit (2)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Zusätzlich verwenden wir binäre Prädikatensymbole p_{A} für jedes Nichtterminalsymbol A.

Die Kodierung von Grammatiken ist nun direkt möglich:

- Wir nehmen o.B.d.A. an, dass G_1 und G_2 keine Nichtterminale gemeinsam haben.
- Eine Produktionsregel $\mathsf{A} \to \sigma_1 \cdots \sigma_n$ kodieren wir als Formel:

$$\forall x_0, \ldots, x_n.((p_{\sigma_1}(x_0, x_1) \wedge \ldots \wedge p_{\sigma_n}(x_{n-1}, x_n)) \to p_{\mathsf{A}}(x_0, x_n))$$

- Idee: Die Formel erkennt, ob eine gegebene Kette aus Terminalen und Nichtterminalen aus einem anderen Nichtterminal entstehen kann.

Unentscheidbarkeit (3)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Seien S_1 und S_2 die Startsymbole von G_1 und G_2. Dann wollen wir das Schnittproblem kodieren, indem wir fragen, ob die folgende Formel folgt:

$$\exists x, y.(p_{S_1}(x, y) \wedge p_{S_2}(x, y))$$

Was fehlt?

Unentscheidbarkeit (3)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Seien S_1 und S_2 die Startsymbole von G_1 und G_2. Dann wollen wir das Schnittproblem kodieren, indem wir fragen, ob die folgende Formel folgt:

$$\exists x, y.(p_{S_1}(x, y) \wedge p_{S_2}(x, y))$$

Was fehlt?

- Die Grammatik-Formeln können erkennen, ob eine Zeichenkette aus S_1 oder S_2 abgeleitet werden kann.
- Jede Interpretation, welche die Kodierung eines Wortes $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$ enthält, muss daher auch die Formel $\exists x, y.(p_{S_1}(x, y) \wedge p_{S_2}(x, y))$ erfüllen.
- Aber: Es kann auch Interpretationen geben, welche keine Kodierung von w enthalten. (Diese verhindern die gewünschte Schlussfolgerung.)

$\rightsquigarrow$ Alle möglichen Wörter müssten kodiert vorkommen ...

Unentscheidbarkeit (4)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Alle möglichen Wörter müssten kodiert vorkommen ...
Dazu fügen wir noch folgende Sätze hinzu:

$$\forall x.\exists y.p_{\mathsf{a}}(x,y) \qquad \text{für jedes Terminalsymbol a}$$

Unentscheidbarkeit (4)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Alle möglichen Wörter müssten kodiert vorkommen ...
Dazu fügen wir noch folgende Sätze hinzu:

$$\forall x.\exists y.p_{\mathsf{a}}(x,y) \qquad \text{für jedes Terminalsymbol a}$$

- Jedes Modell dieser Theorie muss Kodierungen aller Wörter enthalten (aber eventuell als zyklische oder überlappende Pfade, z.B. in einer Interpretation mit nur einem Element, welches in jeder möglichen Relation zu sich selbst steht).

Unentscheidbarkeit (4)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Alle möglichen Wörter müssten kodiert vorkommen ...
Dazu fügen wir noch folgende Sätze hinzu:

$$\forall x.\exists y.p_{\mathsf{a}}(x,y) \qquad \text{für jedes Terminalsymbol a}$$

- Jedes Modell dieser Theorie muss Kodierungen aller Wörter enthalten (aber eventuell als zyklische oder überlappende Pfade, z.B. in einer Interpretation mit nur einem Element, welches in jeder möglichen Relation zu sich selbst steht).
- Gibt es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$, dann muss auch dieses Wort kodiert vorkommen: Es folgt $\exists x, y.(p_{\mathsf{S}_1}(x,y) \wedge p_{\mathsf{S}_2}(x,y))$.

Unentscheidbarkeit (4)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Alle möglichen Wörter müssten kodiert vorkommen ...
Dazu fügen wir noch folgende Sätze hinzu:

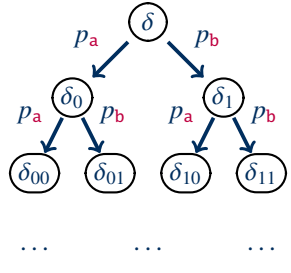
$$\forall x.\exists y.p_{\mathsf{a}}(x,y) \qquad \text{für jedes Terminalsymbol a}$$

- Jedes Modell dieser Theorie muss Kodierungen aller Wörter enthalten (aber eventuell als zyklische oder überlappende Pfade, z.B. in einer Interpretation mit nur einem Element, welches in jeder möglichen Relation zu sich selbst steht).
- Gibt es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$, dann muss auch dieses Wort kodiert vorkommen: Es folgt $\exists x, y.(p_{\mathsf{S}_1}(x,y) \wedge p_{\mathsf{S}_2}(x,y))$.
- Folgt $\exists x, y.(p_{\mathsf{S}_1}(x,y) \wedge p_{\mathsf{S}_2}(x,y))$, erfüllen alle Modelle diesen Satz, insbesondere auch das Modell, welches man erhält, indem man einen unendlichen Baum aller Wörter aufbaut.

Unentscheidbarkeit (5)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Fortsetzung): Skizze des „kanonischen“ baumförmigen Modells, welches keine Zyklen oder parallelen Relationen enthält, über Alphabet $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ (ohne eventuelle Kanten für Nichtterminale):



Falls „sogar“ dieses Modell $\exists x, y.(\, p_{\mathsf{S}_1}(x, y) \wedge p_{\mathsf{S}_2}(x, y))$ erfüllt, dann muss es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$ geben.

Unentscheidbarkeit (6)

Satz: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

Beweis (Zusammenfassung): Wir konstruieren aus G_1 und G_2 eine logische Theorie $\mathcal{T}$ mit den folgenden Sätzen:

- für jede Produktionsregel $\mathsf{A} \to \sigma_1 \cdots \sigma_n$ von G_1 oder G_2:

$$\forall x_0, \ldots, x_n.((p_{\sigma_1}(x_0, x_1) \wedge \ldots \wedge p_{\sigma_n}(x_{n-1}, x_n)) \to p_{\mathsf{A}}(x_0, x_n))$$

- Für jedes Terminalsymbol a:

$$\forall x.\exists y.p_{\mathsf{a}}(x, y)$$

Dann gilt $\mathcal{T} \models \exists x, y.(p_{\mathsf{S}_1}(x, y) \wedge p_{\mathsf{S}_2}(x, y))$ genau dann, wenn es ein Wort $w \in \mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$ gibt.

Die Unentscheidbarkeit von Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit folgt, weil man logische Konsequenz auf diese Probleme reduzieren kann. □

Einfache Folgerungen

Offensichtlich wird das Schließen nicht einfacher, wenn man auch noch Gleichheit erlaubt:

Korollar: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik mit Gleichheit ist unentscheidbar.

Umgekehrt kann man aus dem Beweis noch stärkere Ergebnisse folgern, z.B.:

Korollar: Logisches Schließen (Unerfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, logische Konsequenz) in der Prädikatenlogik ist bereits unentscheidbar, wenn nur binäre Prädikatensymbole verwendet werden.

Quiz: Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Quiz: Welche der folgenden Problem sind per Korollar aus dem soeben gezeigten Resultat ebenfalls unentscheidbar? . . .

Unentscheidbarkeit hat viele Beweise

Unser Unentscheidbarkeitsbeweis ist nicht der Einzige . . .

- Mit Prädikatenlogik kann man viele mathematische Definitionen direkt ausdrücken.
- Viele Probleme lassen sich dadurch ziemlich einfach kodieren.
- Der erste Schritt ist am wichtigsten:
  Wie wollen wir das Problem in logischen Interpretationen mit Relationen darstellen?
- Sind die Prädikatensymbole einmal festgelegt, dann muss man „nur noch“ die Problemdefinition in diese Kodierung übersetzen.

Unentscheidbarkeit hat viele Beweise

Unser Unentscheidbarkeitsbeweis ist nicht der Einzige ...

- Mit Prädikatenlogik kann man viele mathematische Definitionen direkt ausdrücken.
- Viele Probleme lassen sich dadurch ziemlich einfach kodieren.
- Der erste Schritt ist am wichtigsten:
  Wie wollen wir das Problem in logischen Interpretationen mit Relationen darstellen?
- Sind die Prädikatensymbole einmal festgelegt, dann muss man „nur noch“ die Problemdefinition in diese Kodierung übersetzen.

Beispiel: Wir könnten das Halteproblem von TMs direkt kodieren, aber dabei benötigt man viel mehr Prädikate. Es ist nicht schwer, Aussagen zu kodieren wie z.B. „Falls es einen Zeitpunkt t gibt, an dem die TM in Zustand q an Position y das Zeichen a liest, dann folgt auf t ein Zeitpunkt t', an dem die TM in Zustand q' ist.“ Der Beweis ist leicht, sofern man keine relevante Aussage vergisst.

Gödel

Zwischenstand

Wir haben bisher zwei Dinge erkannt:

(1) Prädikatenlogik ist sehr ausdrucksstark: Mit ihr können wir z.B. das mathematische Konzept der Gleichheit axiomatisieren oder Probleme über formale Sprachen beschreiben.

(2) Prädikatenlogisches Schließen ist unentscheidbar: Man kann Probleme definieren, die nicht mehr algorithmisch lösbar sind.

Eignet sich Prädikatenlogik also als universelle Beschreibungssprache für die Mathematik (und darüber hinaus)?

Dazu hat Kurt Gödel (1906–1978) einiges zu sagen ...

Gödels Einsichten

Gödel zeigte einige wesentliche Dinge:

(1) Gödelscher Vollständigkeitssatz (1930):
„Es gibt ein konsistentes Verfahren, das alle Konsequenzen einer prädikatenlogischen Theorie effektiv beweisen kann.“
  - Alle wahren Sätze können endlich bewiesen werden.
  - Prädikatenlogisches Schließen ist semi-entscheidbar.

Gödels Einsichten

Gödel zeigte einige wesentliche Dinge:

(1) Gödelscher Vollständigkeitssatz (1930):
„Es gibt ein konsistentes Verfahren, das alle Konsequenzen einer prädikatenlogischen Theorie effektiv beweisen kann.“
- Alle wahren Sätze können endlich bewiesen werden.
- Prädikatenlogisches Schließen ist semi-entscheidbar.

(2) 1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz (1931):
„Es gibt kein konsistentes Verfahren, das alle Konsequenzen der elementaren Arithmetik effektiv beweisen kann.“
- Für jedes Verfahren gibt es allgemeingültige Sätze über elementare arithmetische Zusammenhänge, die nicht bewiesen werden können.
- Die Wahrheit elementarer arithmetischer Zusammenhänge ist nicht semi-entscheidbar.

Gödels Einsichten

Gödel zeigte einige wesentliche Dinge:

(1) Gödelscher Vollständigkeitssatz (1930):
„Es gibt ein konsistentes Verfahren, das alle Konsequenzen einer prädikatenlogischen Theorie effektiv beweisen kann.“
  - Alle wahren Sätze können endlich bewiesen werden.
  - Prädikatenlogisches Schließen ist semi-entscheidbar.

(2) 1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz (1931):
„Es gibt kein konsistentes Verfahren, das alle Konsequenzen der elementaren Arithmetik effektiv beweisen kann.“
  - Für jedes Verfahren gibt es allgemeingültige Sätze über elementare arithmetische Zusammenhänge, die nicht bewiesen werden können.
  - Die Wahrheit elementarer arithmetischer Zusammenhänge ist nicht semi-entscheidbar.

(3) 2. Gödelscher Unvollständigkeitssatz (1931): später

Mehr dazu in späteren Vorlesungen . . .

Algorithmen zum logischen Schließen

Wie können wir logisch schließen?

Gödel betrachtete ein konkretes Verfahren zum logischen Schließen, basierend auf:

- Einer Menge an vorgegebenen Tautologien;
- einer Menge von Regeln, mit denen man aus bereits bekannten Tautologien neue ableiten kann.

Diese Art von Verfahren war seit der Antike bekannt.

Wie können wir logisch schließen?

Gödel betrachtete ein konkretes Verfahren zum logischen Schließen, basierend auf:

- Einer Menge an vorgegebenen Tautologien;
- einer Menge von Regeln, mit denen man aus bereits bekannten Tautologien neue ableiten kann.

Diese Art von Verfahren war seit der Antike bekannt.

Gödel zeigte, dass dieses Verfahren die Semantik der Prädikatenlogik genau charakterisiert:

- Das Verfahren ist korrekt (es leitet nur echte Tautologien ab) – das war bekannt.
- Das Verfahren ist vollständig (es kann jede Tautologie auch ableiten) – ein Durchbruch, Gödels Vollständigkeitssatz.

Theorie und Praxis

Gödel zeigte damit auch die Semi-Entscheidbarkeit des logischen Schließens:

- Man kann systematisch alle möglichen Ableitungen neuer Tautologien bilden.
- Ist eine Formel eine Tautologie, dann wird sie irgendwann abgeleitet.
- Ist eine Formel keine Tautologie, dann werden wir es auf diese Art nie erfahren.

Theorie und Praxis

Gödel zeigte damit auch die Semi-Entscheidbarkeit des logischen Schließens:

- Man kann systematisch alle möglichen Ableitungen neuer Tautologien bilden.
- Ist eine Formel eine Tautologie, dann wird sie irgendwann abgeleitet.
- Ist eine Formel keine Tautologie, dann werden wir es auf diese Art nie erfahren.

Das ist nicht sehr praktisch, wenn man wissen will, ob eine gegebene Formel F eine Tautologie ist . . .

Geht es besser?

Theorie und Praxis

Gödel zeigte damit auch die Semi-Entscheidbarkeit des logischen Schließens:

- Man kann systematisch alle möglichen Ableitungen neuer Tautologien bilden.
- Ist eine Formel eine Tautologie, dann wird sie irgendwann abgeleitet.
- Ist eine Formel keine Tautologie, dann werden wir es auf diese Art nie erfahren.

Das ist nicht sehr praktisch, wenn man wissen will, ob eine gegebene Formel F eine Tautologie ist . . .

Geht es besser?

- Logisches Schließen ist unentscheidbar: Kein Verfahren kann die Frage nach Allgemeingültigkeit sicher beantworten.
- Aber: Es gibt effizientere, zielgerichtetere Methoden.

Für echte Implementierungen (Jahrzehnte später) wurden bessere Algorithmen entwickelt.

Bessere Algorithmen

Bessere Algorithmen

Ein besonders erfolgreicher Algorithmus in praktischen Implementierungen ist Resolution.

Bessere Algorithmen

Ein besonders erfolgreicher Algorithmus in praktischen Implementierungen ist Resolution.

Rückblick: Resolution in Aussagenlogik (Formale Systeme, VL 23)

- Methode zum Test auf Unerfüllbarkeit
- Die Formel wird zunächst in Klauselform umgeformt – konjunktive Normalform (KNF) in Mengenschreibweise.
- In jedem Ableitungsschritt leitet man aus zwei zueinander passenden Klauseln eine neue ab:

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_n, A\} \qquad \{\neg A, L'_1, \ldots, L'_m\}}{\{L_1, \ldots, L_n, L'_1, \ldots, L'_m\}}$$

- Das Verfahren endet, wenn man entweder die leere Klausel erhält (unerfüllbar) oder, andernfalls, wenn keine neuen Klauseln mehr erzeugt werden können (erfüllbar).

Resolution in Prädikatenlogik

Resolution in der Prädikatenlogik funktioniert ganz ähnlich:

(1) Umformung in Klauselform;

(2) Durchführung von Resolutionsschritten, bei denen jeweils zwei Klauseln kombiniert werden;

(3) Terminierung wenn die leere Klausel auftritt oder keine neuen Klauseln mehr entstehen.

Wir müssen aber mehr beachten als zuvor:

- Die Umformung in Klauselform muss jetzt Quantoren berücksichtigen.
- Die Resolutionsschritte müssen die kompliziertere Form von Atomen (Prädikate mit Termen als Parameter) berücksichtigen.
- Es wird im Allgemeinen möglich sein, unendlich viele Klauseln abzuleiten, ohne jemals die leere Klausel zu erzeugen – Terminierung ist nicht garantiert.

Syntaktische Umformungen in der Prädikatenlogik

Formeln umformen

Wir haben bereits gelernt (Vorlesung 14):

- In prädikatenlogischen Formeln darf man Teilformeln durch semantisch äquivalente Formeln ersetzten (Ersetzungstheorem).
- Für die aussagenlogischen Junktoren gelten die gleichen Äquivalenzen wie in der Aussagenlogik.

$\leadsto$ Damit kann man schon viele Umformungen vornehmen.

Es fehlen uns aber noch Äquivalenzen zum Umgang mit Quantoren.

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Beweis: Die Beweise ergeben sich direkt aus der Definition der Semantik, z.B.:

$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg\exists x.F$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models \exists x.F$

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Beweis: Die Beweise ergeben sich direkt aus der Definition der Semantik, z.B.:

$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg\exists x.F$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models \exists x.F$
gdw. es gibt kein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models F$

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Beweis: Die Beweise ergeben sich direkt aus der Definition der Semantik, z.B.:

$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg\exists x.F$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models \exists x.F$
gdw. es gibt kein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models F$
gdw. für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models F$

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Beweis: Die Beweise ergeben sich direkt aus der Definition der Semantik, z.B.:

$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg\exists x.F$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models \exists x.F$
gdw. es gibt kein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models F$
gdw. für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models F$
gdw. für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models \neg F$

Äquivalenzen mit Quantoren

Es gelten die folgenen Beziehungen:

$$\neg\exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$
$$\neg\forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

Negation von Quantoren

$$\exists x.\exists y.F \equiv \exists y.\exists x.F$$
$$\forall x.\forall y.F \equiv \forall y.\forall x.F$$

Kommutativität

$$\exists x.(F \vee G) \equiv (\exists x.F \vee \exists x.G)$$

Distributitivität $\exists/\vee$

$$\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$$

Distributitivität $\forall/\wedge$

Beweis: Die Beweise ergeben sich direkt aus der Definition der Semantik, z.B.:

$\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \neg\exists x.F$ gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models \exists x.F$
gdw. es gibt kein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ mit $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models F$
gdw. für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models F$
gdw. für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models \neg F$
gdw. $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models \forall x.\neg F$ □

Nicht-Äquivalenzen mit Quantoren

Andere, ähnliche Beziehungen gelten nicht.

Nicht-Äquivalenzen mit Quantoren

Andere, ähnliche Beziehungen gelten nicht.

Es gilt $\exists x.\forall y.F \not\equiv \forall y.\exists x.F$.

Zum Beispiel bedeutet $\forall x.\exists y.\text{hatVater}(x, y)$ „Jeder hat einen Vater“ dagegen $\exists y.\forall x.\text{hatVater}(x, y)$ „Jemand ist Vater aller.“

(Anmerkung: Gödel war religiös und hat einen philosophischen Gottesbeweis in modaler Logik formalisiert [siehe „Gödel's ontological proof“]; Russell war engagierter Atheist und scharfer Kritiker der Kirchen [siehe z.B. „Why I am not a Christian,“ 1927; deutsche Übersetzung erstmals 1932 in Dresden veröffentlicht].)

Nicht-Äquivalenzen mit Quantoren

Andere, ähnliche Beziehungen gelten nicht.

Es gilt $\exists x.\forall y.F \not\equiv \forall y.\exists x.F$.

Zum Beispiel bedeutet $\forall x.\exists y.\text{hatVater}(x, y)$ „Jeder hat einen Vater“ dagegen $\exists y.\forall x.\text{hatVater}(x, y)$ „Jemand ist Vater aller.“

(Anmerkung: Gödel war religiös und hat einen philosophischen Gottesbeweis in modaler Logik formalisiert [siehe „Gödel's ontological proof“]; Russell war engagierter Atheist und scharfer Kritiker der Kirchen [siehe z.B. „Why I am not a Christian,“ 1927; deutsche Übersetzung erstmals 1932 in Dresden veröffentlicht].)

Es gilt $\forall x.(F \vee G) \not\equiv (\forall x.F \vee \forall x.G)$.

Zum Beispiel ist $\forall x.(\text{glücklich}(x) \vee \neg\text{glücklich}(x))$ („Jeder ist entweder glücklich oder nicht.“) eine Tautologie, $(\forall x.\text{glücklich}(x) \vee \forall x.\neg\text{glücklich}(x))$ („Entweder sind alle glücklich oder keiner.“) dagegen nicht.

Quiz: Äquivalenzen mit Quantoren

Quiz: Welche der folgenden Äquivalenzen gelten für beliebige prädikatenlogische Formeln F und G? ...

Negationsnormalform

Eine Formel F ist genau dann in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur Quantoren und die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt.

Formeln, die negierte oder nicht-negierte Atome sind, nennt man Literale.
In NNF darf Negation also nur in Literalen vorkommen.

Negationsnormalform

Eine Formel F ist genau dann in Negationsnormalform (NNF) wenn

(a) sie nur Quantoren und die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält und

(b) der Junktor $\neg$ nur direkt vor Atomen vorkommt.

Formeln, die negierte oder nicht-negierte Atome sind, nennt man Literale.
In NNF darf Negation also nur in Literalen vorkommen.

Beispiele:

- $\forall x.(p(x) \wedge \exists y.(\neg r(x,y) \vee q(y)))$ ist in NNF
- $\neg\forall x.p(x)$ ist nicht in NNF
- $\exists x.\neg\neg p(x)$ ist nicht in NNF
- $\exists x.(p(x) \leftrightarrow p(x))$ ist nicht in NNF

Umwandlung in NNF (1)

Es ist möglich, eine Formel rekursiv in NNF umzuformen.

Dazu ersetzten wir zunächst alle Vorkommen von $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ unter Verwendung der bekannten Äquivalenzen:

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$$
$$(F \leftrightarrow G) \equiv \big((\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)\big)$$

Umwandlung in NNF (2)

Sei F eine Formel, die nur Quantoren und die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ enthält.
Wir definieren eine Formel $\mathrm{NNF}(F)$ rekursiv wie folgt:

- $\mathrm{NNF}(F) = F$ falls F ein Atom ist
- $\mathrm{NNF}(F \wedge G) = \mathrm{NNF}(F) \wedge \mathrm{NNF}(G)$
- $\mathrm{NNF}(F \vee G) = \mathrm{NNF}(F) \vee \mathrm{NNF}(G)$
- $\mathrm{NNF}(\exists x.F) = \exists x.\mathrm{NNF}(F)$
- $\mathrm{NNF}(\forall x.F) = \forall x.\mathrm{NNF}(F)$
- $\mathrm{NNF}(\neg F) = \neg F$ falls F ein Atom ist
- $\mathrm{NNF}(\neg\neg F) = \mathrm{NNF}(F)$
- $\mathrm{NNF}(\neg(F \wedge G)) = \mathrm{NNF}(\neg F) \vee \mathrm{NNF}(\neg G)$
- $\mathrm{NNF}(\neg(F \vee G)) = \mathrm{NNF}(\neg F) \wedge \mathrm{NNF}(\neg G)$
- $\mathrm{NNF}(\neg\exists x.F) = \forall x.\mathrm{NNF}(\neg F)$
- $\mathrm{NNF}(\neg\forall x.F) = \exists x.\mathrm{NNF}(\neg F)$

Quantoren, die nichts binden

Offensichtlich gilt

$$\exists x.F \equiv F \equiv \forall x.F \qquad \text{falls } x \text{ in } F \text{ nicht als freie Variable vorkommt}$$

weil die Zuweisung von x bei der Frage $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \stackrel{?}{\models} F$ keine Rolle spielt.

Quantoren, die nichts binden

Offensichtlich gilt

$$\exists x.F \equiv F \equiv \forall x.F \qquad \text{falls } x \text{ in } F \text{ nicht als freie Variable vorkommt}$$

weil die Zuweisung von x bei der Frage $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \stackrel{?}{\models} F$ keine Rolle spielt.

Dieses Prinzip funktioniert in vielen Fällen.

Kommt x in F nicht als freie Variable vor, dann gilt:

$$\exists x.(F \wedge G) \equiv (F \wedge \exists x.G) \equiv (\exists x.F \wedge \exists x.G)$$
$$\forall x.(F \vee G) \equiv (F \vee \forall x.G) \equiv (\forall x.F \vee \forall x.G)$$
$$\exists x.\forall y.F \equiv \forall y.\exists x.F$$
$$\forall x.\exists y.F \equiv \exists y.\forall x.F$$

Variablenumbenennung

Man kann durch Quantoren gebundene Vorkommen von Variablen einheitlich umbenennen, ohne die Semantik der Formel zu ändern.

Satz: Sei $Qx.F$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ eine Formel, sei y eine Variable, die nicht in F vorkommt, und sei $F\{x \mapsto y\}$ die Formel, die man erhält, wenn man alle freien Vorkommen von x in F durch y ersetzt. Dann gilt $Qx.F \equiv Qy.F\{x \mapsto y\}$.

Variablenumbenennung

Man kann durch Quantoren gebundene Vorkommen von Variablen einheitlich umbenennen, ohne die Semantik der Formel zu ändern.

Satz: Sei $Qx.F$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ eine Formel, sei y eine Variable, die nicht in F vorkommt, und sei $F\{x \mapsto y\}$ die Formel, die man erhält, wenn man alle freien Vorkommen von x in F durch y ersetzt. Dann gilt $Qx.F \equiv Qy.F\{x \mapsto y\}$.

Es ist aber wichtig, dass die eingesetzte Variable nicht schon in F vorkommt (auch nicht gebunden):

Beispiel: Sei G die Formel $\forall x.\exists y.\text{hatVater}(x, y)$.

- Wir können x in z umbenennen und erhalten die semantisch äquivalente Formel $\forall z.\exists y.\text{hatVater}(z, y)$.
- Benennen wir x dagegen in y um, dann entsteht $\forall y.\exists y.\text{hatVater}(y, y) \equiv \exists y.\text{hatVater}(y, y)$ („Jemand ist sein eigener Vater“).

Bereinigte Formeln

Eine Formel F ist bereinigt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(1) Keine Variable in F kommt sowohl frei als auch gebunden vor.

(2) Keine Variable in F wird von mehr als einem Quantor gebunden.

Bereinigte Formeln

Eine Formel F ist bereinigt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(1) Keine Variable in F kommt sowohl frei als auch gebunden vor.

(2) Keine Variable in F wird von mehr als einem Quantor gebunden.

Man kann jede Formel leicht durch Umbenennung gebundener Variablen bereinigen.

Beispiel: Die Formel

$$\forall y.(\, p(x,y) \to \exists x.(r(y,x) \wedge \forall y.q(x,y)))$$

kann wie folgt bereinigt werden:

$$\forall y.(\, p(x,y) \to \exists z.(r(y,z) \wedge \forall v.q(z,v)))$$

Zusammenfassung und Ausblick

Logisches Schließen in Prädikatenlogik ist unentscheidbar (gezeigt) aber semi-entscheidbar (noch zu zeigen).

Resolution kann auch in der Prädikatenlogik zum logischen Schließen eingesetzt werden.

Mit Hilfe semantischer Äquivalenzen kann man beliebige Formeln in einheitliche Normalformen überführen.

Was erwartet uns als nächstes?

- Funktionen
- Resolution
- Logik über endlichen Interpretationen und ihre praktische Anwendung

Bildrechte

Folie 12: Fotografie um 1926, gemeinfrei