Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (Syntaktisch korrekt?)

Seien p und q aussagenlogische Variable.

(a) Sind die folgenden Zeichenreihen arithmetische Ausdrücke laut deren Definition in der Vorlesung?

(1) $(3 - 2) + 1 - (3 \times 4)$
(2) $(((-3) \times (-4)) + 8)$
(3) $((-2 \times -2) = 8)$
(4) $-((3 \times 1.8) + 1)$
(5) $(p + (q - (2 \times q)))$

(b) Sind die folgenden Zeichenreihen aussagenlogische Formeln laut Definition 3.5 ?

(1) $(1 + (2 \times (p \wedge q)))$
(2) $(2p \wedge 3q)$
(3) $((\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q))$
(4) $(p \wedge p \wedge p \wedge p)$
(5) $(((\neg p) \vee \neg q) \to \neg \wedge q)$
(6) $\neg((\neg p \leftrightarrow \neg(p \wedge q)) \to (p \wedge \neg\neg\neg p))$

Aufgabe 1.2 (Induktionsbeweis: $n \leq n^2$)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl kleiner oder gleich ihrem Quadrat ist.

Aufgabe 1.3 (Unendliche Formeln?)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gibt es eine aussagenlogische Formel, die aus n Zeichen des Alphabets der Aussagenlogik besteht.

(b) Jede aussagenlogische Formel ist eine endliche Zeichenreihe,
d.h. es gibt also keine unendlich langen aussagenlogischen Formeln.

Hinweis: *Setzen Sie für den Beweis als bekannt voraus, dass endliche Zeichenreihen, miteinander verknüpft, wieder endlich lang sind.*

Aufgabe 1.4 (Induktion: Klammer, Variablen und Junktoren)

Gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Antworten. Verwenden Sie dazu, falls möglich, das Prinzip der strukturellen Induktion.

(a) In jeder aussagenlogischen Formel ist die Anzahl der öffnenden Klammern gleich die Anzahl der schließenden Klammern.

(b) In jeder aussagenlogischen Formel sind doppelt so viele Klammern enthalten wie binäre Junktoren.

(c) In jeder aussagenlogischen Formel ist die Anzahl der aussagenlogischen Variablen größer oder gleich der Anzahl der einstelligen Junktoren. (Mehrfach vorkommende Variablen oder Junktoren sollen hierbei mehrfach gezählt werden.)

Aufgabe 1.5 (Funktionen über Formelmengen)

(a) Definieren Sie für eine gegebene aussagenlogische Variable A durch strukturelle Rekursion eine einstellige Funktion h über der Menge der aussagenlogischen Formeln, die berechnet, wie oft A in einer Formel F vorkommt.

(b) Definieren Sie durch strukturelle Rekursion eine Funktion laenge, welche die Anzahl der Zeichen bestimmt, aus denen eine Formel besteht (Leerzeichen nicht mitgezählt). Bestimmten Sie sodann $\mathsf{laenge}\big((p \vee (q \wedge \neg p))\big)$.

(c) Definieren Sie mit struktureller Rekursion eine Funktion du, die angewandt auf eine aussagenlogische Formel F, folgendes leistet:

(i) Alle aussagenlogischen Variablen A in F werden durch $\neg A$ ersetzt.

(ii) Alle $\wedge$ in F werden durch $\vee$ ersetzt.

(iii) Alle $\vee$ in F werden durch $\wedge$ ersetzt.

(iv) Strukturen der Form $(H \rightarrow G)$ in F werden durch $(H \wedge \neg G)$ ersetzt.

(v) Strukturen der Form $(H \leftrightarrow G)$ in F werden durch $((H \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg H))$ ersetzt.

Wenden Sie sodann die Funktion du auf die Formel $(p \rightarrow (p \wedge \neg q))$ an.