4 Prädikatenlogik

4.3 Semantik

A. Beispiele zur Interpretationsanwendung

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln $\mathcal{L}(\mathcal{R},\mathcal{F},\mathcal{V})$ sei gegeben durch $\mathcal{R} = \{p/1, q/1\}$ und $\mathcal{F} = \{f/2, g/1, a/0, b/0\}$.

(a) Es sei die folgende Interpretation I_1 gegeben.

Grundbereich $\mathcal{D}_1 = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\} = \{s^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$
$a^{I_1} = b^{I_1} = 0$
$g^{I_1}(x) = s(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}_1$

$$f^{I_1}(s^n(0), s^m(0)) = \begin{cases} s^n(0) & \text{falls } n > m \\ s^m(0) & \text{falls } n \leq m \end{cases} \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}$$

$p^{I_1} = \{0\}$
$q^{I_1} = \{x \mid x \in \mathcal{D}_1\}$

Geben Sie die Werte der folgenden Terme und Formeln unter der Interpretation I_1 an.

(1) $f(g(f(a, g(a))), a)$

(2) $f(g(a), f(a, a))$

(3) $(\forall X)(p(X) \rightarrow \neg q(g(X)))$

(b) Es sei die folgende Interpretation I_2 gegeben.

Grundbereich $\mathcal{D}_2$: Die Menge aller endlichen Listen mit Elementen a, b, c oder d.
Es seien $a^{I_2} = [d]$, $b^{I_2} = [a, b, c]$, $p^{I_1} = \{([\,])\}$, $q^{I_1} = \{([a, b, c, d])\}$,

$$g^{I_2}(L) = \begin{cases} [b] & \text{wenn } L = [\,] \text{ und } L \in \mathcal{D}_2 \\ T & \text{wenn } L = [H|T] \text{ und } L \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

$$f^{I_2}(L_1, L_2) = \begin{cases} [H_1|T_2] & \text{falls } L_1 = [H_1|T_1] \text{ und} \\ & \phantom{\text{falls }} L_2 = [H_2|T_2] \text{ und } L_1, L_2 \in \mathcal{D}_2 \\ [b, c] & \text{falls } L_1 = [\,] \text{ oder } L_2 = [\,] \end{cases}$$

(1) Bestimmen Sie den Wert von $g(f(a, g(b)))$ unter der Interpretation I_2.

(2) Geben Sie einen Term t aus der vorgegebenen Sprache an, für den gilt $t^{I_2} = [a, c]$, und führen Sie den Nachweis, dass $t^{I_2} = [a, c]$ gilt.

(3) Bestimmen Sie $[((\forall X)p(f(X, X)) \wedge (\exists X)q(g(X)))]^{I_2}$.