TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

Dr. habil. Hannes Straß Dr. Dörthe Arndt

Übungen zur Lehrveranstaltung

Theoretische Informatik und Logik

Sommersemester 2022

8. Übungsblatt

Woche vom 13. bis 17. Juni 2022

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe P

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \land (q(x, c_2, z) \lor p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

a) die Menge aller Teilformeln;

b) die Menge aller Terme;

c) die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;

d) ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe Q

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{F_1, \ldots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe R

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Universum aus verschiedenen Personen und Speisen und ein Prädikat *mag*, so dass $mag(x, y)$ ausdrückt *„x mag y"*.

a) „Übersetzen“ Sie folgende prädikatenlogische Formeln in natürlichsprachlich formulierte

Aussagen:

(a) $\forall x.mag(x, Eiscreme)$.

(b) $\forall x.\exists y.mag(x, y)$.

(c) $\forall x.\forall y.mag(x, y) \land \neg mag(x, y)$.

b) „Übersetzen“ Sie folgende natürlichsprachlich formulierte Aussagen in prädika- tenlogische Formeln:

(a) Tom mag keinen Fisch.

(b) Jeder, der Pizza mag, mag auch Spaghetti.

(c) Es gibt niemanden, der alles mag.

Aufgabe 2

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x.\, p(x,x) \land \forall x, y.\, ((p(x,y) \land p(y,x)) \to x \approx y) \land \forall x, y, z.\, ((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$$

a) $\mathcal{I}_1$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\, (m,n) \mid m < n \,\}$;

b) $\mathcal{I}_2$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\, (n,n+1) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$;

c) $\mathcal{I}_3$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\, (m,n) \mid m \text{ teilt } n \,\}$;

d) $\mathcal{I}_4$ mit Grundmenge Σ^* für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\, (x,y) \mid x \text{ ist Präfix von } y \,\}$;

e) $\mathcal{I}_5$ mit Grundmenge $\mathfrak{P}(M)$ für eine Menge M und $p^{\mathcal{I}_5} = \{\, (X,Y) \mid X \subseteq Y \,\}$.

Aufgabe 3

a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle

(a) höchstens drei,

(b) mindestens drei,

(c) genau drei

Elemente in der Grundmenge besitzen.

b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Relationensymbol p in jedem Modell als der Graph einer

(a) injektiven Funktion,

(b) surjektiven Funktion,

(c) bijektiven Funktion

interpretiert wird.

(Der Graph einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Relation $\{\, (x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \,\}$.)

Aufgabe 4

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sind Γ und Γ' Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models F$ auch $\Gamma' \models F$.

b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.

c) Eine prädikatenlogische Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

d) Es gilt

$$\{\, \forall x, y.\, (p(x,y) \to p(y,x)), \forall x, y, z.\, ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z)) \,\} \models \forall x.\, p(x,x).$$