4 Prädikatenlogik

4.5 Unifikation

D. Zur Terminierung des Unifikationsalgorithmus

In der Vorlesung wurde für ein gegebenes Unifikationsproblem $\mathcal{U}$ das Paar $(\mathsf{v}(\mathcal{U}), \mathsf{l}(\mathcal{U}))$ – mit $\mathsf{v}(\mathcal{U}), \mathsf{l}(\mathcal{U}) \in \mathbb{N}$ – definiert wobei

$$\mathsf{l}(E) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } E \text{ eine Variable ist,} \\ 1 & \text{wenn } E \text{ eine Konstante ist,} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{l}(t_i) & \text{wenn } E \text{ die Form } f(t_1, \ldots, t_n) \text{ hat,} \\ \mathsf{l}(s) + \mathsf{l}(t) & \text{wenn } E \text{ die Form } s \approx t \text{ hat,} \\ \sum_{j=1}^{m} \mathsf{l}(s_j \approx t_j) & \text{wenn } E \text{ die Form } \dot{\{} s_1 \approx t_1, \ldots, s_m \approx t_m \dot{\}} \text{ hat.} \end{cases}$$

und $\mathsf{v}(E)$ die Anzahl der in E vorkommenden Variablen ist, wobei Mehrfachvorkommen derselben Variable einfach gezählt werden.

Darüberhinaus wurde auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation $\succ$ wie folgt definiert:

$$(n, m) \succ (n', m') \quad \text{gdw.} \quad n > n' \text{ oder } (n{=}n' \text{ und } m{>}m')$$

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine unendlich lange Folge der Art

$$(n_1, m_1) \succ (n_2, m_2) \succ (n_3, m_3) \succ \ldots$$

(b) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges gegebenes Unifikationsproblem $\mathcal{U}$ das Paar $(\mathsf{v}(\mathcal{U}), \mathsf{l}(\mathcal{U}))$ bei jedem Schleifendurchlauf des Unifikationsalgorithmus kleiner bzgl. $\succ$ wird, d.h. falls das Unifikationsproblem $\mathcal{U}'$ aus $\mathcal{U}$ durch Anwendung des Unifikationsalgorithmus entsteht, so gilt $(\mathsf{v}(\mathcal{U}), \mathsf{l}(\mathcal{U})) \succ (\mathsf{v}(\mathcal{U}'), \mathsf{l}(\mathcal{U}'))$.