



Formale Systeme

8. Übungsblatt

Wintersemester 2023/24

Aufgabe zur Selbstkontrolle (diese werden in den Übungen nicht besprochen)

S15) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, P, S)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow UT, S \rightarrow VW, U \rightarrow XB, U \rightarrow AB, \\ & X \rightarrow AU, T \rightarrow TC, T \rightarrow c, V \rightarrow AV, \\ & V \rightarrow a, W \rightarrow BY, W \rightarrow BC, Y \rightarrow WC, \\ & D \rightarrow BC, D \rightarrow BB, D \rightarrow b, E \rightarrow AB, \\ & E \rightarrow AA, A \rightarrow a, B \rightarrow b, C \rightarrow c \}. \end{aligned}$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die Wörter $w_1 = aabcc$ und $w_2 = aabbcc$ zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

S16) Gegeben sind das Wort $w = aaaab$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}, \Sigma = \{a, b\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow AB, S \rightarrow BC, S \rightarrow bab, \\ & A \rightarrow BA, A \rightarrow a, \\ & B \rightarrow ABC, B \rightarrow b, \\ & C \rightarrow AB, C \rightarrow a, C \rightarrow \varepsilon \}. \end{aligned}$$

- Transformieren Sie die Grammatik G in eine ε -freie Grammatik G' .
- Transformieren Sie die Grammatik G' in ihre *Chomsky*-Normalform.
- Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mithilfe der Abschlußeigenschaften für kontextfreie Sprachen, dass die nachfolgende Sprache

$$L_0 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

kontextfrei ist und geben dann eine kontextfreie Grammatik G_0 für L_0 an mit $L_0 = L(G_0)$.

Aufgabe 2

Geben Sie für die nachfolgenden Sprachen L_i jeweils eine (kontextfreie) Grammatik G_i in CNF mit $L_i \setminus \{\varepsilon\} = L(G_i)$ an:

- Es sei L_1 genau die Menge der Palindrome über $\Sigma = \{a, b\}$.
(Palindrome sind Wörter, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind,
z.B. $aba, abba, a, \varepsilon, bb$)
- Es sei L_2 die Sprache aller $w \in \{a, b\}^*$ mit gleicher Anzahl an a 's und b 's.
- Es sei $L_3 = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$

Aufgabe 3

Gegeben seien L_1, L_2, L_3 wie in Aufgabe 2. Wenden Sie den CYK-Algorithmus für folgende Instanzen an um zu prüfen ob das jeweilige Wort zur entsprechenden Sprache gehört:

- L_1 mit $w = abba$ sowie $w = aba$
- L_2 mit $w = aababb$
- L_3 mit $w = ababbaba$

Aufgabe 4

- Geben Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M}_0 für die Sprache

$$L_0 = L(\mathcal{M}_0) = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ oder } j = k \text{ mit } i, j, k \geq 1\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in \mathcal{M}_0 für das Wort $w = aaabbcc$ an.

- Geben Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M}_1 für die Sprache L' mit

$$L' = L(\mathcal{M}_1) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n = 3m\}$$

sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in \mathcal{M}_1 für das Wort $w = aaab$ an.

- Entwerfen Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M}_2 für die Sprache L_2 mit

$$L_2 = L(\mathcal{M}_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}.$$

und geben Sie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in \mathcal{M}_2 für das Wort $w = aabbbba$ an. Zur Erinnerung: $|w|_a$ bezeichnet hierbei die Anzahl an a 's in w .

- Geben Sie einen Kellerautomaten \mathcal{M}_3 für die Sprache

$$L_3 = L(\mathcal{M}_3) = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$$

über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sowie eine akzeptierende Folge der Konfigurationsübergänge in \mathcal{M}_3 für das Wort $w = ababbaba$ an.

Hinweis: Nutzen Sie ggf. die zugehörigen Grammatiken in CNF aus Aufgabe 2.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache, so ist auch $\pi(L)$ kontextfrei, wobei

$$\pi(L) = \{a_1 \dots a_n \in \Sigma^* : \text{Es existiert eine Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ von } (1 \dots n), \text{ so dass } a_{i_1} \dots a_{i_n} \in L\}$$