

Theoretische Informatik und Logik

11. Vorlesung: NL und PSpace

Markus Krötzsch

Professur Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 1. Juni 2026

NP-vollständige Probleme

NP-vollständige Probleme

= Probleme, die mindestens so schwer sind, wie alle anderen Probleme in NP

= die schwersten Probleme in NP.

Alles oder nichts:

Entweder sind alle NP-vollständigen Probleme in P

oder kein einziges NP-vollständiges Problem ist in P

Ladner: „Alle glauben $P \neq NP$. Dann gibt es aber auch beliebig viele Probleme in NP, die nicht NP-vollständig sind und dennoch nicht in P liegen.“

Anders gesagt: Neben den „schwersten“ Problemen in NP gibt es dann auch noch viele „mittelschwere“, welche dennoch nicht in P liegen. Bisher wissen wir nicht, welche das sind.

Leichte NP-vollständige Probleme

Pseudopolynomielle Probleme sind polynomiell in der Größe von Eingabe und gegebenen Zahlenbeträgen.

Das macht sie in der Praxis oft eher einfach.

Beispiel: Das Rucksackproblem ist nur dann NP-vollständig, wenn die Gewichte der Gegenstände über-polynomiell wachsen dürfen. Ein Problem mit so schweren Gegenständen ist aber nur dann interessant, wenn auch der Rucksack eine sehr große Kapazität hat. Alternativ könnte man mit sehr hoher Genauigkeit wiegen.

NL

Die Macht des Speichers

Selbst innerhalb kleiner Speichergrenzen ist sehr viel machbar:

- **SAT** ist mit linearem Speicher lösbar:
Wir iterieren durch alle Wahrheitswertbelegungen (jeweils linear groß) und testen jeweils, ob die Formel erfüllt ist (logarithmischer Speicher für ein paar Pointer und Zwischenergebnisse)
- Linearer Speicher genügt zur Erkennung kontextsensitiver Sprachen (durch linear beschränkte Automaten, LBA)
- Jedes NP-vollständige Problem ist in polynomiellen Speicher lösbar:
Wir iterieren durch alle polynomiellen Zertifikate und simulieren einen polynomiellen Verifikator auf ihnen

↪ sehr kleine Speichergrenzen sind sinnvoll

Erinnerung: L

LogSpace (L): Sprachen die man mit sehr wenig Arbeitsspeicher erkennen kann

Wesentliche Datentypen:

- Zähler, Maximalwert polynomiell beschränkt
- Pointer auf (read-only) Eingabeband

Jeweils fest deklariert, d.h. ihre Anzahl hängt nicht von der Eingabe ab

Wesentliche Programmierfeatures:

- Initialisiere Pointer oder Zähler auf festen Wert
- Inkrementiere/dekrementiere Pointer oder Zähler
- Vergleiche Speicherinhalte von zwei Pointern oder zwei Zählern (und führe je nach Ergebnis anderen Code aus)

Optionaler Ausgabestrom: Write-only, write once

NLogSpace

Nichtdeterministische TM mit logarithmischem Speicher:

$$NL = NLOGSPACE = NSPACE(\log n)$$

Alternativ:

„Probleme, deren Lösung in L verifiziert werden kann“

- Gleiche Programmierfeatures wie in L
- Aber nichtdeterministische Operationen möglich,
z.B. setze Pointer auf eine zufällige Eingabeposition

Beispiel: Erreichbarkeit

Das Problem der **(s-t)-Erreichbarkeit** in gerichteten Graphen lautet wie folgt:

Gegeben: gerichteter Graph G mit Knoten s und t

Frage: Gibt es in G einen gerichteten Pfad von s nach t ?

Satz: Erreichbarkeit in gerichteten Graphen liegt in NL.

Beweis (Algorithmus):

- Wir verwenden einen Pointer p auf einen Knoten (in der Eingabe) und einen Zähler z
- Initialisiere $*p = s$ und $z = 1$
- Schleife:
 - Falls $*p = t$ dann akzeptiere
 - Falls $z = \text{Anzahl der Knoten in } G$ dann verwirfe
 - Andernfalls: inkrementiere z und setze p auf einen Nachfolger des aktuellen Knotens $*p$ (nichtdet.)

□

NL-Vollständigkeit

Man kann NL-Schwere ähnlich wie für NP definieren:

- Statt polynomiellen Reduktionen verwendet man Logspace-Reduktionen
- NL-schwer: jedes Problem in NL ist darauf logspace-reduzierbar
- NL-vollständig: in NL und NL-schwer

Intuition: NL-vollständige Probleme sind die schwersten in NL

Beispiel: Erreichbarkeit in gerichteten Graphen ist NL-vollständig.

Beispiel: Erreichbarkeit in ungerichteten Graphen ist in NL aber (vermutlich) nicht NL-schwer: Das Problem liegt in L (Omer Reingold, 2005).

L, NL und coNL

Rückblick: Savitch sagte uns, dass $\text{NPSpace} = \text{PSPACE}$, also auch $\text{NPSpace} = \text{coNPSpace}$

Für logarithmischen Speicher ergibt Savitchs Ergebnis aber lediglich:

$\text{NL} \subseteq \text{DSpace}(\log^2 n) \rightsquigarrow$ daraus folgt nicht $\text{NL} \subseteq \text{L}$!

Man weiß dennoch:

Satz (Immerman 1987, Szelepcsényi 1987): $\text{NL} = \text{coNL}$.

Beispiel: Nichterreichbarkeit in gerichteten Graphen kann in NL entschieden werden. Betrachtet man den NL-Algorithmus für Erreichbarkeit, dann ist das zunächst überraschend ...

(Eng verwandtes Resultat: kontextsensitive Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen)

PSPACE

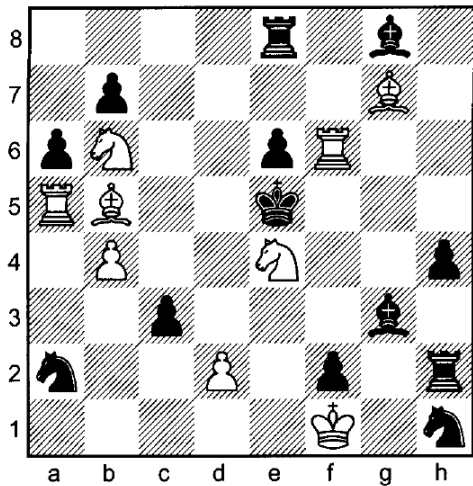
Noch schwerere Probleme?

Beobachtung: Bisher waren alle entscheidbaren schweren Probleme der Vorlesung auch in NP, d.h. ihre Lösung war leicht verifizierbar:

- **Erfüllbarkeit, Hamiltonpfad, Clique, Rucksack:** NP-vollständige Probleme mit polynomiellen Verifikatoren
- **Faktorisierung:** in $NP \cap coNP$
- **Erreichbarkeit in Graphen:** in NP (Zertifikat ist Pfad); sogar in P (z.B. Breitensuche)

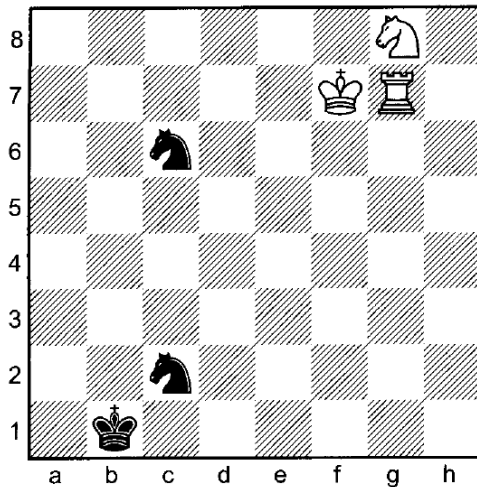
Gibt es überhaupt noch schwerere entscheidbare Probleme?

Beispiel: Schachrätsel



Matt in drei Zügen; Weiß ist am Zug

Beispiel: Schachrätsel



Matt in 262 Zügen; Weiß ist am Zug

Rückblick Aussagenlogik

Rückblick Aussagenlogik

- Aussagenlogische Formeln basieren auf **Atomen** (Propositionen, Variablen)
- Atome werden mit **Junktoren** verknüpft: \neg , \wedge , \vee , \rightarrow
(wir setzen immer Klammern zwischen verschiedene binären Junktoren)
- Wir erlauben außerdem die nullstelligen Operatoren \top (wahr) und \perp (falsch)
- **Belegungen** ordnen Atomen **Wahrheitswerte** **1** oder **0** zu

- **SAT**: Gegeben eine aussagenlogische Formel φ , **existiert** eine Belegung der Atome in φ , für die φ wahr wird?
- **Tautologie**: Gegeben eine aussagenlogische Formel φ , wird φ für **alle** Belegungen der Atome in φ wahr?

↪ Existentielle und universelle Quantoren über Wahrheitswerte

Ein Problem in PSpace

Ein Beispiel für ein erstes typisches PSpace-Problem ergibt sich, wenn man **SAT** und **Tautologie** verallgemeinert:

Eine **Quantifizierte Boolesche Formel** (QBF) ist eine logische Formel der folgenden Form:

$$Q_1 p_1 \cdot Q_2 p_2 \cdot \dots \cdot Q_\ell p_\ell \cdot F[p_1, \dots, p_\ell]$$

mit $i \geq 0$, $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ Quantoren, p_i aussagenlogischen Atomen (Variablen) und F einer aussagenlogischen Formel mit Atomen p_1, \dots, p_ℓ .

Beispiele:

- $\forall p. \exists q. (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $\forall p_1, p_2, p_3. \exists q. (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow ((p_1 \vee q) \wedge (\neg q \vee p_2 \vee p_3))$

Anmerkung: wir sparen uns die äußerste Klammer sowie Klammern in Ketten von \wedge und \vee

Semantik von QBF

Jeder QBF-Formel Q wird ein eindeutiger Wahrheitswert $W(Q)$ zugeordnet:

- QBF-Formeln ohne Atome (d.h. nur mit \top und \perp) werden wie aussagenlogische Formeln evaluiert
- $W(\exists p.F[p]) = 1$ falls $W(F[p/\top]) = 1$ oder $W(F[p/\perp]) = 1$
- $W(\forall p.F[p]) = 1$ falls $W(F[p/\top]) = 1$ und $W(F[p/\perp]) = 1$

Dabei heißt $\varphi[p/\top]$: „ φ mit p ersetzt durch \top “; analog für \perp .

Beispiel:

$$W(\forall p.\exists q.(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) = 1$$

gdw. $W(\exists q.(\top \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \top)) = 1$ und

$$W(\exists q.(\perp \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \perp)) = 1$$

gdw. $W((\top \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \top)) = 1$ oder $W((\top \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow \top)) = 1$ und

$$W((\perp \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \perp)) = 1 \text{ oder } W((\perp \rightarrow \perp) \wedge (\perp \rightarrow \perp)) = 1$$

Wahre QBF erkennen

Durch die Quantoren steht der Wahrheitswert jeder QBF fest, d.h. er hängt nicht von Belegungen ab.

Das Problem **TrueQBF** ist wie folgt

Gegeben: eine QBF Q

Frage: Ist $W(Q) = 1$?

Beispiel: SAT lässt sich auf **TrueQBF** reduzieren, indem man jedes Atom der gegebenen aussagenlogischen Formel existentiell quantifiziert.

Beispiel: Tautologie lässt sich auf **TrueQBF** reduzieren, indem man jedes Atom der gegebenen aussagenlogischen Formel universell quantifiziert.

TrueQBF in polynomiellem Speicher

Satz: TrueQBF ist in PSpace.

Beweis: Durch Angabe eines (Pseudo-)Algorithmus

```
01 TRUEQBF( $F$ ) :  
02   if  $F$  „hat keine Quantoren“ :  
03     return „Aussagenlogische Auswertung von  $F$ “  
04   else if  $F = \exists p.G$  :  
05     return (TRUEQBF( $G[p/\top]$ ) OR TRUEQBF( $G[p/\perp]$ ))  
06   else if  $F = \forall p.G$  :  
07     return (TRUEQBF( $G[p/\top]$ ) AND TRUEQBF( $G[p/\perp]$ ))
```

- Evaluation in Zeile 03 möglich in PSpace
- Rekursion in Zeilen 05 und 07 können der Reihe nach abgearbeitet werden, wobei Speicher wiederverwendet wird
- Jeder Rekursionsschritt benötigt polynomiellen Speicher
- Maximale Rekursionstiefe = Zahl der Atome (linear) □

PSpace-Schwere

Ein Problem Q ist **PSpace-schwer** wenn für jedes Problem P in PSpace ein polynomielle Reduktion $P \leq_p Q$ existiert. Q ist **PSpace-vollständig** wenn es PSpace-schwer ist und in PSpace liegt.

Satz: TrueQBF ist PSpace-schwer.

Beweisidee: siehe nächste Vorlesung

QBF als Spiel

Man kann **TrueQBF** als Spiel auffassen:

- Das „Spielbrett“ ist eine QBF
- Zwei Spieler, **Anton** und **Emilia**, wählen der Reihe nach Wahrheitswerte
- Steht $\forall p$ vorn, so darf Anton einen Wert für p wählen und den Quantor löschen
- Steht $\exists p$ vorn, so darf Emilia einen Wert für p wählen und den Quantor löschen
- Emilia gewinnt, wenn die Formel nach Entfernen aller Quantoren wahr wird

Beobachtung: Emilia hat eine Gewinnstrategie im Formelspiel genau dann wenn die gegebene QBF wahr ist.

Beispiel: Sipsers Geography

Ein Kinderspiel:

- Zwei Spieler benennen abwechselnd Städte
- Jede Stadt muss mit dem letzten Buchstaben der zuvor genannten beginnen
- Wiederholungen sind verboten
- Der erste Spieler, der keine Stadt mehr nennen kann, verliert

Ein Mathematikerspiel:

- Zwei Spieler markieren Knoten in einem gerichteten Graph
- Jeder Knoten muss ein Nachfolger des vorigen sein
- Wiederholungen sind verboten
- Der erste Spieler, der keinen Knoten markieren kann, verliert

Entscheidungsproblem **Geography**:

Gegeben: Ein gerichteter Graph und ein Startknoten

Frage: Hat Emilia eine Gewinnstrategie für dieses Spiel?

Geography ist PSpace-vollständig

Satz: Geography ist PSpace-vollständig

Beweis: nächste Vorlesung

Und was ist mit Schach?

Schach selbst ist endlich:

- endlich viele mögliche Stellungen
- in jeder hat Weiß eine Gewinnstrategie oder nicht

↪ Problem in $O(1)$

Verallgemeinertes Schach:

- Beliebige großes Spielbrett
- Beliebige viele Figuren

↪ ExpTime-vollständig (d.h. vermutlich nicht in PSpace)

Intuition: Schach ist schwerer als typische PSpace-Spiele, da man Züge rückgängig machen kann

↪ Spiel kann mehr als polynomiell viele Züge dauern

Zusammenfassung und Ausblick

Erreichbarkeit in gerichteten Graphen ist das typische NL-vollständige Problem

Es gibt schwere Probleme, die keine leicht zu prüfende Lösung haben

Quantifizierte Boolesche Formeln verallgemeinern Aussagenlogik

PSpace ist die Klasse der interessanten Zwei-Spieler-Spiele, die nicht zu lange dauern

Was erwartet uns als nächstes?

- Alternierung
- noch mehr Logik