Technische
Universität
Dresden

Theoretische Informatik und Logik

4. Vorlesung: Resolution und Horn-Logik

Markus Krötzsch

Professur Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 23. April 2026

Logik: Glossar

Atom	kleinste mögliche Formel	$p \in \mathbf{P}$
Teilformel	Unterausdruck, der Formel ist	$\mathrm{Sub}(F)$
Wertzuweisung	Funktion	$w : \mathbf{P} \to \{1, 0\}$
Modell	erfüllende Wertzuweisung	$w \models F$ / $w(F) = 1$
Literal	Atom oder negiertes Atom	p oder $\neg p$
Klausel	Disjunktion von Literalen	$L_1 \vee \ldots \vee L_n$
Monom	Konjunktion von Literalen	$L_1 \wedge \ldots \wedge L_n$
logische Konsequenz	Teilmengenbeziehung der Modellmengen; entspricht $\to$	$F \models G$ oder $\mathcal{F} \models G$
semantische Äquivalenz	Gleichheit der Modellmengen; entspricht $\leftrightarrow$	$F \equiv G$ oder $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$
Tautologie	allgemeingültige Formel	$\models F$

Rückblick: Vereinfachungen und Normalformen

Jede Formel ist semantisch äquivalent zu einer, die nur folgende Junktoren verwendet:

- $\wedge$ und $\neg$
- $\vee$ und $\neg$
- und verschiedene andere Kombinationen ... (z.B. $\to$ und $\neg$; oder auch $\uparrow$)

Normalformen

- Negationsnormalform
  stets linear
- Konjunktive Normalform
  im schlimmsten Fall exponentiell; mit Hilfsatomen linear
- Disjunktive Normalform
  im schlimmsten Fall exponentiell

Resolution

Resolution

Ziel: Verfahren, um (Un)Erfüllbarkeit einer KNF zu bestimmen

Leider ist (Un)Erfüllbarkeit nicht an einzelnen Klauseln erkennbar.

Beispiel: Die Logelei aus Vorlesung 1 haben wir mit den Formeln $\mathcal{F} = \{A \leftrightarrow \neg B, B \leftrightarrow \neg C, C \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)\}$ dargestellt. Wir wollen beweisen, dass Barbara die Wahrheit sagt, also $\mathcal{F} \models B$. Dazu kann man zeigen, dass $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ unerfüllbar ist. Bei Anwendung des Distributivgesetztes erhalten wir die folgende KNF:

$$\begin{aligned}(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge{}\\ (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C) \wedge{}\\ (\neg C \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge{}\\ \neg B\end{aligned}$$

Die Klauselform

Wenn man grundsätzlich mit KNF arbeitet, dann bieten sich einige syntaktische Vereinfachungen an:

- Eine Klausel $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ wir dargestellt als Menge $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- Eine Konjunktion von Klauseln $K_1 \wedge \ldots \wedge K_\ell$ wird dargestellt als Menge $\{K_1, \ldots, K_\ell\}$

Eine Menge von Mengen von Literalen unter dieser Interpretation heißt Klauselform.

Die Klauselform

Wenn man grundsätzlich mit KNF arbeitet, dann bieten sich einige syntaktische Vereinfachungen an:

- Eine Klausel $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ wir dargestellt als Menge $\{L_1, \ldots, L_n\}$
- Eine Konjunktion von Klauseln $K_1 \wedge \ldots \wedge K_\ell$ wird dargestellt als Menge $\{K_1, \ldots, K_\ell\}$

Eine Menge von Mengen von Literalen unter dieser Interpretation heißt Klauselform.

Beispiel: Die KNF

$$\begin{aligned}(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \\ (\neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C) \wedge \\ (\neg C \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge \\ \neg B\end{aligned}$$

kann in Klauselform dargestellt werden als:

$$\{\{\neg A, \neg B\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg A\}, \{A, B, C\}, \{\neg B\}\}$$

Ableitungen mittels Resolution

Beim Resolutionsverfahren leiten wir schrittweise neue Klauseln aus den gegebenen ab.

Ein einzelner Resolutionschritt funktioniert wie folgt:

Gegeben seien zwei Klauseln K_1 und K_2 für die es ein Atom $p \in \mathbf{P}$ gibt mit $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$. Die Resolvente von K_1 und K_2 bezüglich p ist die Klausel $(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$.

Eine Klausel R ist eine Resolvente einer Klauselmenge $\mathcal{K}$ wenn R Resolvente zweier Klauseln $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ist.

Ableitungen mittels Resolution

Beim Resolutionsverfahren leiten wir schrittweise neue Klauseln aus den gegebenen ab.

Ein einzelner Resolutionschritt funktioniert wie folgt:

Gegeben seien zwei Klauseln K_1 und K_2 für die es ein Atom $p \in \mathbf{P}$ gibt mit $p \in K_1$ und $\neg p \in K_2$. Die Resolvente von K_1 und K_2 bezüglich p ist die Klausel $(K_1 \setminus \{p\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg p\})$.

Eine Klausel R ist eine Resolvente einer Klauselmenge $\mathcal{K}$ wenn R Resolvente zweier Klauseln $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ ist.

Beispiel: Resolventen für die Menge $\{\{\neg A, \neg B\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg A\}, \{A, B, C\}, \{\neg B\}\}$ sind z.B.

- $\{B, \neg A\}$ aus den Klauseln $\{B, C\}$ und $\{\neg C, \neg A\}$
- $\{A\}$ aus den Klauseln $\{A, B\}$ und $\{\neg B\}$
- $\{B, \neg B\}$ aus den Klauseln $\{B, C\}$ und $\{\neg B, \neg C\}$

Bedeutung von Resolutionsschritten

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

Bedeutung von Resolutionsschritten

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$

Bedeutung von Resolutionsschritten

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_\ell) \equiv p \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$

Bedeutung von Resolutionsschritten

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_\ell) \equiv p \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$

Daraus folgt unmittelbar $(\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$
$\leadsto$ dies entspricht der Klausel $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_\ell\}$

Bedeutung von Resolutionsschritten

Wir betrachten Klauseln $\{L_1, \ldots, L_n, p\}$ und $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\}$:

- $\{L_1, \ldots, L_n, p\} \equiv (L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee p) \equiv (\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to p$
- $\{\neg p, M_1, \ldots, M_\ell\} \equiv (\neg p \vee M_1 \vee \ldots \vee M_\ell) \equiv p \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$

Daraus folgt unmittelbar $(\neg L_1 \wedge \ldots \wedge \neg L_n) \to (M_1 \vee \ldots \vee M_\ell)$
$\leadsto$ dies entspricht der Klausel $\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_\ell\}$

Satz: Wenn R Resolvente der Klauseln K_1 und K_2 ist, dann gilt $\{K_1, K_2\} \models R$.

Resolutionsschritte produzieren also logische Schlüsse. Diese Eigenschaft einer Ableitungsregel wird Korrektheit genannt („jede Ableitung ist tatsächlich eine logische Konsequenz").

Die leere Klausel

Die Resolvente kann eine leere Menge $\emptyset$ sein.

Beispiel: Die Resolvente der Klauseln $\{p\}$ und $\{\neg p\}$ ist leer.

Was bedeutet so eine leere Klausel?

Die leere Klausel

Die Resolvente kann eine leere Menge $\emptyset$ sein.

Beispiel: Die Resolvente der Klauseln $\{p\}$ und $\{\neg p\}$ ist leer.

Was bedeutet so eine leere Klausel?

- Klauseln sind Disjunktionen
- Die leere Klausel entspricht einer Disjunktion von 0 Literalen
- Dieser Ausdruck sollte das neutrale Element der Disjunktion sein, d.h. immer den Wert 0 annehmen

$\leadsto$ Wir bezeichnen die leere Klausel mit $\bot$.

Die leere Klausel

Die Resolvente kann eine leere Menge $\emptyset$ sein.

Beispiel: Die Resolvente der Klauseln $\{p\}$ und $\{\neg p\}$ ist leer.

Was bedeutet so eine leere Klausel?

- Klauseln sind Disjunktionen
- Die leere Klausel entspricht einer Disjunktion von 0 Literalen
- Dieser Ausdruck sollte das neutrale Element der Disjunktion sein, d.h. immer den Wert 0 annehmen

$\leadsto$ Wir bezeichnen die leere Klausel mit $\bot$.

Was bedeutet es, wenn $\bot$ in Klauselform auftaucht?

Die leere Klausel

Die Resolvente kann eine leere Menge $\emptyset$ sein.

Beispiel: Die Resolvente der Klauseln $\{p\}$ und $\{\neg p\}$ ist leer.

Was bedeutet so eine leere Klausel?

- Klauseln sind Disjunktionen
- Die leere Klausel entspricht einer Disjunktion von 0 Literalen
- Dieser Ausdruck sollte das neutrale Element der Disjunktion sein, d.h. immer den Wert 0 annehmen

$\leadsto$ Wir bezeichnen die leere Klausel mit $\bot$.

Was bedeutet es, wenn $\bot$ in Klauselform auftaucht?

- Die Klauselform beschreibt eine Konjunktion von Klauseln
- Wenn eine der Klauseln $\bot$ ist, dann ist die gesamte Formel unerfüllbar

$\leadsto$ Die Ableitung von $\bot$ zeigt Unerfüllbarkeit.

Das Resolutionskalkül

Wir können damit das gesamte Verfahren angeben:

Resolution

Gegeben: Formel $\mathcal{F}$ in Klauselform

Gesucht: Ist $\mathcal{F}$ erfüllbar oder unerfüllbar?

(1) Finde ein Klauselpaar $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ mit Resolvente $R \notin \mathcal{F}$

(2) Setze $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{R\}$

(3) Wiederhole Schritt (1) und (2) bis keine neuen Resolventen gefunden werden können

(4) Falls $\perp \in \mathcal{F}$, dann gib „unerfüllbar“ aus; andernfalls gib „erfüllbar“ aus

Das Resolutionskalkül

Wir können damit das gesamte Verfahren angeben:

Resolution

Gegeben: Formel $\mathcal{F}$ in Klauselform

Gesucht: Ist $\mathcal{F}$ erfüllbar oder unerfüllbar?

(1) Finde ein Klauselpaar $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$ mit Resolvente $R \notin \mathcal{F}$

(2) Setze $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{R\}$

(3) Wiederhole Schritt (1) und (2) bis keine neuen Resolventen gefunden werden können

(4) Falls $\bot \in \mathcal{F}$, dann gib „unerfüllbar“ aus; andernfalls gib „erfüllbar“ aus

Beobachtung: Unerfüllbarkeit steht fest, sobald $\bot$ abgeleitet wurde
$\rightsquigarrow$ dann kann man das Verfahren frühzeitig abbrechen

Erfüllbarkeit kann dagegen erst erkannt werden, wenn alle Resolventen erschöpfend gebildet worden sind

Beispiel

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$	Anna oder Barbara lügen.
(2)	$\{A, B\}$	Anna oder Barbara sagen die Wahrheit.
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$	Barbara oder Chris lügen.
(4)	$\{B, C\}$	Barbara oder Chris sagen die Wahrheit.
(5)	$\{\neg C, \neg A\}$	Chris oder Anna lügen.
(6)	$\{A, B, C\}$	Jemand sagt die Wahrheit.
(7)	$\{\neg B\}$	Barbara lügt.

Beispiel

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$		Anna oder Barbara lügen.
(2)	$\{A, B\}$		Anna oder Barbara sagen die Wahrheit.
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$		Barbara oder Chris lügen.
(4)	$\{B, C\}$		Barbara oder Chris sagen die Wahrheit.
(5)	$\{\neg C, \neg A\}$		Chris oder Anna lügen.
(6)	$\{A, B, C\}$		Jemand sagt die Wahrheit.
(7)	$\{\neg B\}$		Barbara lügt.
(8)	$\{C\}$	(4)+(7)	Chris sagt die Wahrheit.

Beispiel

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$		Anna oder Barbara lügen.
(2)	$\{A, B\}$		Anna oder Barbara sagen die Wahrheit.
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$		Barbara oder Chris lügen.
(4)	$\{B, C\}$		Barbara oder Chris sagen die Wahrheit.
(5)	$\{\neg C, \neg A\}$		Chris oder Anna lügen.
(6)	$\{A, B, C\}$		Jemand sagt die Wahrheit.
(7)	$\{\neg B\}$		Barbara lügt.
(8)	$\{C\}$	(4)+(7)	Chris sagt die Wahrheit.
(9)	$\{\neg A\}$	(8)+(5)	Anna lügt.

Beispiel

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$		Anna oder Barbara lügen.
(2)	$\{A, B\}$		Anna oder Barbara sagen die Wahrheit.
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$		Barbara oder Chris lügen.
(4)	$\{B, C\}$		Barbara oder Chris sagen die Wahrheit.
(5)	$\{\neg C, \neg A\}$		Chris oder Anna lügen.
(6)	$\{A, B, C\}$		Jemand sagt die Wahrheit.
(7)	$\{\neg B\}$		Barbara lügt.
(8)	$\{C\}$	(4)+(7)	Chris sagt die Wahrheit.
(9)	$\{\neg A\}$	(8)+(5)	Anna lügt.
(10)	$\{B\}$	(2)+(9)	Barbara sagt die Wahrheit.

Beispiel

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$		Anna oder Barbara lügen.
(2)	$\{A, B\}$		Anna oder Barbara sagen die Wahrheit.
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$		Barbara oder Chris lügen.
(4)	$\{B, C\}$		Barbara oder Chris sagen die Wahrheit.
(5)	$\{\neg C, \neg A\}$		Chris oder Anna lügen.
(6)	$\{A, B, C\}$		Jemand sagt die Wahrheit.
(7)	$\{\neg B\}$		Barbara lügt.
(8)	$\{C\}$	(4)+(7)	Chris sagt die Wahrheit.
(9)	$\{\neg A\}$	(8)+(5)	Anna lügt.
(10)	$\{B\}$	(2)+(9)	Barbara sagt die Wahrheit.
(11)	$\bot$	(10)+(7)	Widerspruch.

$\leadsto$ Es gilt $\{\{\neg A, \neg B\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg A\}, \{A, B, C\}\} \models B$

Resolution: Eigenschaften

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Resolution: Eigenschaften

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Korrektheit haben wir schon für einzelne Resolutionsschritte gezeigt. Die Behauptung gilt daher auch, wenn beliebig viele Schritte nacheinander ausgeführt werden (Induktion mit Hypothese: „Die neu abgeleitete Klauselmenge folgt aus der ursprünglichen.“).

Resolution: Eigenschaften (2)

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Terminierung ist leicht zu sehen.

Resolution: Eigenschaften (2)

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Terminierung ist leicht zu sehen. Jede neu abgeleitete Klausel enthält nur Literale, die auch in der ursprünglichen Klauselmenge vorkamen. Die Zahl dieser Literale ist endlich; wir bezeichnen sie mit ℓ. Es gibt nur 2^ℓ Klauseln mit diesen Literalen. Man kann also weniger als 2^ℓ Resolventen hinzufügen bevor das Verfahren terminiert.

Resolution: Eigenschaften (3)

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Vollständigkeit ist etwas aufwändiger.

Vorgehen: Wir zeigen, wie man eine erfüllende Zuweisung finden kann, wenn die leere Klausel nicht abgeleitet wurde.

Widerspruchsfreie Resolution $\rightsquigarrow$ Modell

Für jedes Atom p, das in der Formel vorkommt, bestimmen wir einen Wahrheitswert $w(p)$:

Gegeben: widerspruchsfreie Klauselmenge $\mathcal{F}$ nach Resolution

Für jedes Atom p in $\mathcal{F}$ (in beliebiger Reihenfolge):

(a) Wenn $\{p\} \in \mathcal{F}$, definiere $w(p) := 1$

(b) Wenn $\{\neg p\} \in \mathcal{F}$, definiere $w(p) := 0$

(c) Wenn weder $\{p\} \in \mathcal{F}$ noch $\{\neg p\} \in \mathcal{F}$, dann setze $w(p) := 1$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F} \cup \{\{p\}\}$ und führe nochmals Resolution durch, bis keine weiteren Klauseln abgeleitet werden.

Die so bestimmte Wertzuweisung w ist ein Modell für $\mathcal{F}$.

Beweisskizze:

(1) In Schritt (c) wird nie die leere Klausel abgeleitet (Intuition: Dazu wäre eine Klausel $\{\neg p\}$ nötig, die es aber in diesem Fall nicht geben darf und die auch nicht neu abgeleitet werden kann $\rightsquigarrow$ Induktion)

(2) Dank (1) enthält $\mathcal{F}$ auch nach Bestimmung aller Werte keine leere Klausel (einfache Induktion)

(3) Daher werden alle Klauseln in $\mathcal{F}$ erfüllt (Wenn eine nicht erfüllt wäre, dann könnte man aus ihr unter Verwendung der einelementigen Klauseln $\perp$ ableiten, was aber laut (2) nicht abgeleitet wird)

Resolution: Eigenschaften (4)

Resolution eignet sich tatsächlich zum logischen Schließen:

Satz: Das Resolutionskalkül hat die folgenden Eigenschaften:

- Korrektheit: Wenn $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet wird, dann gilt $\mathcal{F} \models \bot$.
- Vollständigkeit: Wenn $\mathcal{F} \models \bot$, dann kann $\bot$ aus $\mathcal{F}$ abgeleitet werden.
- Terminierung: Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Vollständigkeit ist etwas aufwändiger.

Vorgehen: Wir zeigen, wie man eine erfüllende Zuweisung finden kann, wenn die leere Klausel nicht abgeleitet wurde. $\square$

Anmerkung: „Vollständigkeit" bezieht sich nur auf die Ableitung von $\bot$. Resolution kann nicht jede beliebige Klausel ableiten, die logisch folgt!

Beispiel: widerspruchsfreie Resolution

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$	
(2)	$\{A, B\}$	
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$	
(4)	$\{B, C\}$	
(5)	$\{\neg A, \neg C\}$	
(6)	$\{A, B, C\}$	
(7)	$\{B, \neg B\}$	(2)+(1)
(8)	$\{B, \neg C\}$	(2)+(5)
(9)	$\{A, \neg A\}$	(2)+(1)
(10)	$\{A, \neg C\}$	(2)+(3)
(11)	$\{\neg A, C\}$	(4)+(1)
(12)	$\{C, \neg C\}$	(4)+(3)
(13)	$\{\neg A, B\}$	(4)+(5)
(14)	$\{B, \neg B, C\}$	(6)+(1)
(15)	$\{B, C, \neg C\}$	(6)+(5)
(16)	$\{A, \neg A, C\}$	(6)+(1)
(17)	$\{A, C, \neg C\}$	(6)+(3)
(18)	$\{A, B, \neg B\}$	(6)+(3)
(19)	$\{A, \neg A, B\}$	(6)+(3)
(20)	$\{B\}$	(2)+(13)
(21)	$\{\neg C\}$	(8)+(3)
(22)	$\{\neg A\}$	(13)+(1)
(23)	$\{\neg A, B, \neg B\}$	(14)+(5)
(24)	$\{\neg A, C, \neg C\}$	(15)+(1)
(25)	$\{A, \neg A, \neg B\}$	(16)+(3)
(26)	$\{\neg B, C, \neg C\}$	(17)+(1)
(27)	$\{B, \neg B, \neg C\}$	(18)+(5)
(28)	$\{A, \neg A, \neg C\}$	(19)+(3)
(29)	$\{\neg A, \neg B, \neg C\}$	(23)+(3)
(30)	$\{A, \neg A, B, \neg B\}$	(6)+(29)
(31)	$\{A, \neg A, C, \neg C\}$	(6)+(29)
(32)	$\{B, \neg B, C, \neg C\}$	(6)+(29)
(33)	$\{A, \neg A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(30)+(31)
(34)	$\{\neg A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(33)+(22)
(35)	$\{A, \neg A, B, C, \neg C\}$	(20)+(33)
(36)	$\{A, \neg A, B, \neg B, \neg C\}$	(33)+(21)
(37)	$\{\neg A, B, C, \neg C\}$	(20)+(34)
(38)	$\{\neg A, B, \neg B, \neg C\}$	(34)+(21)
(39)	$\{A, \neg A, B, \neg C\}$	(35)+(21)
(40)	$\{\neg A, B, \neg C\}$	(39)+(22)
(41)	$\{A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(2)+(33)
(42)	$\{A, \neg A, \neg B, C, \neg C\}$	(33)+(3)
(43)	$\{A, \neg A, B, \neg B, C\}$	(4)+(33)
(44)	... und so weiter	

Beispiel: widerspruchsfreie Resolution

(1)	$\{\neg A, \neg B\}$	
(2)	$\{A, B\}$	
(3)	$\{\neg B, \neg C\}$	
(4)	$\{B, C\}$	
(5)	$\{\neg A, \neg C\}$	
(6)	$\{A, B, C\}$	
(7)	$\{B, \neg B\}$	(2)+(1)
(8)	$\{B, \neg C\}$	(2)+(5)
(9)	$\{A, \neg A\}$	(2)+(1)
(10)	$\{A, \neg C\}$	(2)+(3)
(11)	$\{\neg A, C\}$	(4)+(1)
(12)	$\{C, \neg C\}$	(4)+(3)
(13)	$\{\neg A, B\}$	(4)+(5)
(14)	$\{B, \neg B, C\}$	(6)+(1)
(15)	$\{B, C, \neg C\}$	(6)+(5)
(16)	$\{A, \neg A, C\}$	(6)+(1)
(17)	$\{A, C, \neg C\}$	(6)+(3)
(18)	$\{A, B, \neg B\}$	(6)+(3)
(19)	$\{A, \neg A, B\}$	(6)+(3)
(20)	$\{B\}$	(2)+(13)
(21)	$\{\neg C\}$	(8)+(3)
(22)	$\{\neg A\}$	(13)+(1)
(23)	$\{\neg A, B, \neg B\}$	(14)+(5)
(24)	$\{\neg A, C, \neg C\}$	(15)+(1)
(25)	$\{A, \neg A, \neg B\}$	(16)+(3)
(26)	$\{\neg B, C, \neg C\}$	(17)+(1)
(27)	$\{B, \neg B, \neg C\}$	(18)+(5)
(28)	$\{A, \neg A, \neg C\}$	(19)+(3)
(29)	$\{\neg A, \neg B, \neg C\}$	(23)+(3)
(30)	$\{A, \neg A, B, \neg B\}$	(6)+(29)
(31)	$\{A, \neg A, C, \neg C\}$	(6)+(29)
(32)	$\{B, \neg B, C, \neg C\}$	(6)+(29)
(33)	$\{A, \neg A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(30)+(31)
(34)	$\{\neg A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(33)+(22)
(35)	$\{A, \neg A, B, C, \neg C\}$	(20)+(33)
(36)	$\{A, \neg A, B, \neg B, \neg C\}$	(33)+(21)
(37)	$\{\neg A, B, C, \neg C\}$	(20)+(34)
(38)	$\{\neg A, B, \neg B, \neg C\}$	(34)+(21)
(39)	$\{A, \neg A, B, \neg C\}$	(35)+(21)
(40)	$\{\neg A, B, \neg C\}$	(39)+(22)
(41)	$\{A, B, \neg B, C, \neg C\}$	(2)+(33)
(42)	$\{A, \neg A, \neg B, C, \neg C\}$	(33)+(3)
(43)	$\{A, \neg A, B, \neg B, C\}$	(4)+(33)
(44)	. . . und so weiter	

Es ergibt sich ein Modell w mit $w(A) = 0$, $w(B) = 1$ und $w(C) = 0$.

Resolution: Komplexität

Leider können im schlimmsten Fall exponentiell viele Resolventen gebildet werden (wobei die Formel erfüllbar ist, so dass kein frühzeitiger Abbruch möglich ist)

(Die Verwendung von Hilfsatomen zur Ermittlung einer linear großen Klauselform löst dieses Problem nicht)

- Bezüglich der algorithmischen Komplexität ist Resolution schlimmstenfalls nicht besser als andere Verfahren.
- Das hier vorgestellte einfachste Verfahren ist hoffnungslos ineffizient.
- Praktische Implementierungen verwenden in der Regel keine (reine) Resolution, bilden aber manchmal Resolventen

Resolution ist dennoch bedeutsam, da sie gut auf Prädikatenlogik und verwandte Logiken anwendbar ist, was für andere aussagenlogische Verfahren nicht zutrifft.
(Auch da kommen allerdings viele weitere Optimierungen zum Einsatz.)

Horn-Logik

Horn-Logik

Bisher waren alle unsere Ansätze für aussagenlogisches Schließen exponentiell – geht es auch einfacher?

Horn-Logik

Bisher waren alle unsere Ansätze für aussagenlogisches Schließen exponentiell – geht es auch einfacher?

Idee: Beschränke die Form von Formeln

Eine Horn-Klausel* ist eine Klausel, die höchstens ein nichtnegiertes Literal enthält.
Eine Horn-Formel ist eine Formel in KNF, welche nur Horn-Klauseln enthält.

*) nach Alfred Horn, 1918–2001, US-amerikanischer Mathematiker

Horn-Logik

Bisher waren alle unsere Ansätze für aussagenlogisches Schließen exponentiell – geht es auch einfacher?

Idee: Beschränke die Form von Formeln

Eine Horn-Klausel* ist eine Klausel, die höchstens ein nichtnegiertes Literal enthält.
Eine Horn-Formel ist eine Formel in KNF, welche nur Horn-Klauseln enthält.

*) nach Alfred Horn, 1918–2001, US-amerikanischer Mathematiker

Beispiele:

- $\neg p \vee \neg q \vee r$ ist eine Horn-Klausel
- $q \vee p$ ist keine Horn-Klausel
- p ist eine Horn-Klausel
- $\neg p \vee \neg q$ ist eine Horn-Klausel
- $p \vee p$ ist keine Horn-Klausel (aber äquivalent zu einer)

Horn-Klauseln als Implikationen

Jede Horn-Klausel kann als eine Implikation ohne Negation und Disjunktion ausgedrückt werden

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\neg p \vee \neg q \vee r &\equiv (p \wedge q) \to r \\
p &\equiv \top \to p \\
\neg p \vee \neg q &\equiv (p \wedge q) \to \bot
\end{aligned}$$

- Wir verwenden $\top$ für die leere Prämisse und $\bot$ für die leere Konsequenz (weil so die gewünschte logische Äquivalenz gilt)
- Als Implikationen geschriebene Horn-Klauseln werden oft als (Horn-)Regeln bezeichnet
- Es ist üblich, die Klammern der Konjunktion in der Prämisse wegzulassen

Beispiel

Viele einfache rekursive Algorithmen können in Horn-Aussagenlogik beschrieben werden.

Beispiel: In der Lehrveranstaltung Formale Systeme berechneten wir die Variablen V_ϵ einer CFG, welche in ϵ umgeschrieben werden können (siehe Vorlesung 2, Folie 31). Wir betrachten die folgende Menge $\mathcal{F}$ von Horn-Regeln:

$$\top \to p_{\mathsf{A}} \qquad \text{für jede Grammatikregel } \mathsf{A} \to \epsilon$$

$$p_{\mathsf{A}_1} \wedge \ldots \wedge p_{\mathsf{A}_n} \to p_{\mathsf{B}} \qquad \text{für jede Grammatikregel } \mathsf{B} \to \mathsf{A}_1 \cdots \mathsf{A}_n$$

Dann gilt $\mathcal{F} \models p_{\mathsf{A}}$ genau dann wenn $\mathsf{A} \in V_\epsilon$.

Resolution bei Horn-Klauseln

Die Resolution von Horn-Klauseln = Verknüpfung von Regeln:

$$\frac{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \qquad q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}$$

Resolution bei Horn-Klauseln

Die Resolution von Horn-Klauseln = Verknüpfung von Regeln:

$$\frac{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to q \qquad q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}$$

Man kann zeigen (ohne Beweis):

Satz: Das Resolutionskalkül für Horn-Formeln bleibt auch dann vollständig, wenn man sich auf Resolventen beschränkt, bei denen eine Klausel die Form $\{p\}$ (also $\top \to p$) hat.

Diese Einschränkung entspricht der Entfernung von bereits erfüllten Vorbedingungen aus der Prämisse einer Regel:

$$\frac{\top \to q \qquad q \wedge q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}$$

Hyperresolution = Anwendung von Regeln

Es ist leicht zu sehen: Im eingeschränkten Resolutionskalkül für Horn-Formeln kann eine Resolvente aus einer Regel $q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r$ nur dann zur Ableitung von $\bot$ nützlich sein, wenn letztlich alle Vorbedingungen $q_1, \ldots, q_m$ erfüllt sind.
$\leadsto$ Wir können die Resolution aufschieben, bis dies gegeben ist

Hyperresolution = Anwendung von Regeln

Es ist leicht zu sehen: Im eingeschränkten Resolutionskalkül für Horn-Formeln kann eine Resolvente aus einer Regel $q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r$ nur dann zur Ableitung von $\bot$ nützlich sein, wenn letztlich alle Vorbedingungen $q_1, \ldots, q_m$ erfüllt sind.
$\leadsto$ Wir können die Resolution aufschieben, bis dies gegeben ist

Hyperresolution: Mehrere Klauseln mit positiven Literalen werden parallel mit einer Klausel mit vielen negativen Literalen resolviert.

$$\frac{\top \to q_1 \qquad \ldots \qquad \top \to q_m \qquad q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r}{\top \to r}$$

Dies entspricht der intuitiven Idee einer Regelanwendung: „Wenn die Regel $q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \to r$ und die Atome $q_1, \ldots, q_m$ gelten, dann kann r abgeleitet werden."

Komplexität des Schließens mit Horn-Formeln

Vorteil der Hyperresolution bei Horn-Klauseln:

- Jede Resolvente hat die Form $\top \to p$
- Es gibt nur linear viele solche Resolventen (für Atome p, die in der Formel vorkommen)

$\leadsto$ Resolution muss nach linear vielen Schritten terminieren

Komplexität des Schließens mit Horn-Formeln

Vorteil der Hyperresolution bei Horn-Klauseln:

- Jede Resolvente hat die Form $\top \to p$
- Es gibt nur linear viele solche Resolventen (für Atome p, die in der Formel vorkommen)

$\leadsto$ Resolution muss nach linear vielen Schritten terminieren

Dies führt zu einer polynomiellen Laufzeit, nicht zu einer linearen (da jeder Resolutionsschritt einige Zeit benötigt).

Es geht aber auch noch besser:

Satz (Dowling & Gallier): Die Erfüllbarkeit einer Horn-Formel kann in linearer Zeit entschieden werden.

(Ohne Beweis)

Zusammenfassung und Ausblick

Resolution ist ein bekanntes Widerlegungskalkül, welches über die Aussagenlogik hinaus von Bedeutung ist

Wie andere Beweisverfahren für Aussagenlogik benötigt Resolution schlimmstenfalls exponentiell viel Zeit

Horn-Logik erlaubt logisches Schließen in polynomieller Zeit, z.B. mit Resolution.

Offene Fragen:

- Was hat Aussagenlogik mit Sprachen, Berechnung und TMs zu tun?