Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme

13. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 26. Januar – 1. Februar 2026 — Wintersemester 2025/26

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe zur Selbstkontrolle

S22) Wiederholen Sie die Begriffe *Einband Turing-Maschine*, *Mehrband Turing-Maschine*, *Entscheidungsproblem*, *Unentscheidbarkeit*, *Aufzählbarkeit*, *Abzählbarkeit* und *Halteproblem*.

S23) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

(b) Das Postsche Korrespondenzproblem ist bereits über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ nicht entscheidbar.

(c) Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine nur Wörter akzeptiert, die Palindrome sind. (Ein Palindrom ist ein Wort $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_1 \ldots a_n = a_n \ldots a_1$.)

(d) $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ ist semi-entscheidbar.

(e) Es ist nicht entscheidbar, ob die von einer deterministischen Turing-Maschine berechnete Funktion total ist.

(f) Es gibt reguläre Sprachen, die nicht semi-entscheidbar sind.

Es sei $\mathcal{M}_\perp$ eine fest gewählte deterministische Turingmaschine mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, die für alle Eingabewörter $w \in \Sigma$ endlos läuft (d.h., $\mathcal{M}_\perp$ hält auf keiner Eingabe). Analog zur Funktion enc aus der Vorlesung (Vorlesung 22, Folie 9) definieren wir die Funktion dec, welche ein Wort $w \in \Sigma^*$ als Eingabe erhält und, falls w die Kodierung einer Turingmaschine $\mathcal{M}$ ist (d.h. $\mathsf{enc}(\mathcal{M}) = w$ gilt), die Maschine $\mathcal{M}$ zurückgibt. Im Fall, dass es sich bei w nicht um die gültige Codierung einer Turingmaschine handelt, wird $T_\perp$ zurückgegeben. Es gilt also zusammenfassend für ein Wort $w \in \Sigma^*$:

$$\mathsf{dec}(w) = \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{falls } w = \mathsf{enc}(\mathcal{M}) \text{ für eine Turingmaschine } \mathcal{M} \\ \mathcal{M}_\perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1

Ist die nachfolgende Sprache entscheidbar?

$$L = \{ w \in \{0,1,\#\}^* \mid \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1,\#\}^* \text{ mit } |z| \leq |w|^2\text{, so dass } \mathsf{dec}(w) \text{ das Eingabewort } z \text{ in höchstens } |z| \text{ Schritten akzeptiert} \}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Die Funktion t dieser Aufgabe erhält eine deterministische Turingmaschine $\mathcal{M}$ und ein Eingabewort x für $\mathcal{M}$ als Eingabe und gibt die Anzahl der Schritte zurück, die $\mathcal{M}$ bei Eingabe von x durchführt, also

$$t(\mathcal{M}, x) \overset{\text{def}}{=} \text{Anzahl der Schritte, die } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x \text{ durchführt.}$$

Ist die Sprache $L = \{w \in \{0,1,\#\}^* \mid t(\mathsf{dec}(w), w) > 2^{|w|}\}$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es keine Many-One-Reduktion vom Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ von Turing-Maschinen auf das Leerheitsproblem

$$\mathbf{P}_{\mathsf{leer}} \coloneqq \{\mathsf{enc}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \varnothing\}$$

von Turing-Maschinen gibt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass jede semi-entscheidbare Sprache L auf das Halteproblem $\mathbf{P}_{\mathsf{halt}}$ many-one-reduziert werden kann.