Technische Universität Dresden

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Formale Systeme
4. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch | Dr. Stephan Mennicke

Woche vom 10.–16. November 2025 | Wintersemester 2025/26

Aufgabe

S7) Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y, T\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $P = \{S \to X, S \to Y, X \to Tb, Y \to aT, X \to Xb, Y \to aY, T \to \varepsilon, T \to aTb\}$. Geben Sie eine Grammatik G' an mit $L(G') = \{w \in \{a, b\}^* \mid w^R \in L(G)\}$, wobei w^R das gespiegelte Wort zu w ist.

S8) Gegeben ist die Grammatik G aus der Aufgabe S7). Ist G eine ε-freie Grammatik? Wenn nicht, transformieren Sie G in eine ε-freie Grammatik G'. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 1

Gegeben sind das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } u, v \in \Sigma^* \text{ mit } w = ubabcv \text{ und es gibt kein } u \in \Sigma^* \text{ mit } w = au\}.$$

a) Keiner der folgenden regulären Ausdrücke r_i hat die Eigenschaft, dass $L(r_i) = L$ gilt. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispielwort an, dass die Ungleichheit belegt.

   (i) $r_1 = (b \mid c \mid a)^*(babc)(a \mid b \mid c)^*$

   (ii) $r_2 = (b \mid c)(a \mid b \mid c)^*(babc)$

   (iii) $r_3 = (b \mid c)(a \mid b \mid c)^*(a \mid b \mid c)^*(babc)(ccc \mid \varepsilon)(a \mid b \mid c)^*$

b) Geben Sie für L einen regulären Ausdruck r mit $L = L(r)$ an.

Aufgabe 2

Welche Sprachen $L(r_i)$ werden durch folgende reguläre Ausdrücke r_i beschrieben?

a) $r_1 = bb^* \mid (bb)^*a$

b) $r_2 = a^*b(aa^*b)^*b(a \mid b)^*$

c) $r_3 = a^* \mid a^*(b \mid bb)(aa^*(b \mid bb))^*a^*$

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für reguläre Ausdrücke r, s und t ($r \equiv s$ bedeutet $L(r) = L(s)$):

a) $r \mid s \equiv s \mid r$

b) $(r \mid s) \mid t \equiv r \mid (s \mid t)$

c) $(rs)t \equiv r(st)$

d) $r(s \mid t) \equiv rs \mid rt$

e) $\emptyset^* \equiv \varepsilon$

f) $(r^*)^* \equiv r^*$

g) $r^* \equiv rr^* \mid \varepsilon$

h) $(\varepsilon \mid r)^* \equiv r^*$

Aufgabe 4

Geben Sie zu jedem der regulären Ausdrücke r_i einen NFA $\mathcal{M}_i$ mit $L(\mathcal{M}_i) = L(r_i)$ an.

a) $r_1 = (ab)^*$

b) $r_2 = a(b \mid c)a^* \mid a^*$

Wenden Sie dabei jeweils den *kompositionellen Ansatz* sowie den *expliziten Ansatz zur Konstruktion von NFAs* aus der Vorlesung an.

Aufgabe 5

Für zwei Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sei der *perfekte Shuffle* von L_1 und L_2 definiert als

$$L_1 \| L_2 := \{w \in \Sigma^* \mid w = \sigma_1^1 \sigma_2^1 \cdots \sigma_1^k \sigma_2^k \text{ mit } \sigma_1^1 \cdots \sigma_1^k \in L_1 \text{ und } \sigma_2^1 \cdots \sigma_2^k \in L_2, \, \sigma_i^j \in \Sigma\}$$

Beispielsweise ist der perfekte Shuffle der Sprachen $L_1 = \{ab, ac\}$ und $L_2 = \{a, bb, bbc\}$: $L_1 \| L_2 = \{abbb, abcb\}$ und $abbbc \notin L_1 \| L_2$.

Sind die regulären Sprachen unter $\|$ (dem perfekten Shuffle) abgeschlossen? Konkret: Ist die Sprache $L_1 \| L_2$ regulär, wenn die Sprachen L_1 und L_2 regulär sind? Skizzieren Sie einen möglichen Operator auf endlichen Automaten oder beschreiben Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel.

Hinweis: Die nachfolgenden *Zusatzaufgaben* sind optional zur Vertiefung des in der Vorlesung besprochenen Stoffs gedacht. Bevor Sie sich diesen Aufgaben widmen, lösen Sie zunächst alle anderen Aufgaben.

Im Folgenden beziehen wir uns auf den in der zweiten Übung eingeführten Begriff der Simulation. Zur Erinnerung noch einmal die Definition: Für zwei Automaten $\mathcal{M}_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_0^i, F_i)$ $(i = 1, 2)$, nennen wir eine binäre Relation $S \subseteq Q_1 \times Q_2$ *Simulation zwischen* $\mathcal{M}_1$ *und* $\mathcal{M}_2$, wenn für alle $q_0 \in Q_0^1$ ein $q_0' \in Q_0^2$ existiert, sodass $(q_0, q_0') \in S$ *und* für alle Paare $(q_1, q_2) \in S$ und Symbole $a \in \Sigma$ gilt, dass

(i) wenn $q_1' \in \delta_1(q_1, a)$, dann existiert ein $q_2' \in \delta(q_2, a)$ und $(q_1', q_2') \in S$;

(ii) wenn $q_1 \in F_1$, so gilt $q_2 \in F_2$.

$\mathcal{M}_1$ *wird von* $\mathcal{M}_2$ *simuliert*, in Symbolen: $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$, wenn eine Simulation zwischen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ existiert.

Sind $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ deterministisch, so werden in der Definition von Simulation entsprechende Vorkommen von $q_0 \in Q_0^i$ durch $q_0 = q_0^i$ (wobei q_0^i der eindeutige Startzustand von $\mathcal{M}_i$ ist) und $q' \in \delta_i(q, a)$ durch $q' = \delta_i(q, a)$ ersetzt.

Analog wird ein regulärer Ausdruck r_1 von einem regulären Ausdruck r_2 simuliert, wenn $\mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2$ für die zu r_1 und r_2 per kompositioneller Methode (wie in der Vorlesung) konstruierten Automaten.

Aufgabe 6

Wir haben in der Vorlesung neben dem kompositionellem Ansatz die explizite Konstruktion endlicher Automaten aus regulären Ausdrücken kennengelernt. Ist die Art und Weise wie Sie aus einem regulären Ausdruck den Automaten konstruieren unerheblich? Konkret:

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass für jeden regulären Ausdruck α (über einem Alphabet Σ) gelten $\mathcal{M}(\alpha) \preceq \mathcal{M}_\alpha$ und $\mathcal{M}_\alpha \preceq \mathcal{M}(\alpha)$.
Sie dürfen davon ausgehen, dass α frei von inneren Vorkommen von $\emptyset$ ist.

b) Es genügt nicht, die aus der Vorlesung bekannten Identitäten $L(\mathcal{M}(\alpha)) = L(\alpha) = L(\mathcal{M}_\alpha)$ auszunutzen und die entsprechenden Simulationsbeziehungen zu folgern. Weshalb nicht?