Theoretische Informatik und Logik: Besprechung Probeklausur

Stephan Mennicke

Institut für Theoretische Informatik, Professur für Wissensbasierte Systeme

5. August 2024

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar.

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr.

e) Die Beantwortung von Datenbankanfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

Aufgabe 1a (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar.

Aufgabe 1a (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar.

Die Aussage ist wahr.

Laut Vorlesung gilt: $\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{P}\textsc{Space} \subseteq \textsc{ExpTime}$. Also insbesondere $\mathrm{NL} \neq \textsc{ExpTime}$. Gilt nun zusätzleich $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, können wir aus der unerfüllbaren Formel $(\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}) \wedge (\mathrm{NL} \neq \textsc{ExpTime})$ die Entscheidbarkeit des Halteprobelms folgern.

Aufgabe 1b (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.

Aufgabe 1b (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich.

Die Aussage ist falsch.

Wenn die Formel ein mindestens einstelliges Funktionssymbol enthält, so ist das Herbrand-Universum unendlich.
Beispiel: $F = \forall x.p(f(x))$ und $\Delta_F = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}$

Aufgabe 1c (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.

Aufgabe 1c (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat.

Die Aussage ist falsch.

Eine solche Äquivalenz gilt nur für Formeln in Skolemform.
Gegenbeispiel (aus der Vorlesung): $F = \exists x.p(x) \wedge \exists y.\neg p(y)$. Hier gilt $\Delta_F = \{a\}$.

Aufgabe 1d (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p. \forall q. \exists r. \big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr.

Aufgabe 1d (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr.

Die Aussage ist falsch.

Es gilt:
$W(\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)[p/\top, q/\bot]) = 0$ und
$W(\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)[p/\bot, q/\top]) = 0$

Damit gibt es keine Belegung für p so dass die Formel für alle Belegungen für q wahr ist.

Aufgabe 1d (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr.

Die Aussage ist falsch.

Die Gewinnstrategie von Anton ist wie folgt:
Anton belegt q genau mit der Negation des Wahrheitswertes von p. Hat Emilia also p mit 0 belegt, belegt Anton q mit 1; hat Emilia p mit 1 belegt, so belegt Anton q mit 0. So kann Anton garantieren, dass niemals p und q beide wahr oder beide falsch sind.

Aufgabe 1e (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr. ✗

e) Die Beantwortung von Datenbankanfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

Aufgabe 1e (2 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)\big)$ ist wahr. ✗

e) Die Beantwortung von Datenbankanfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer.

Die Aussage ist wahr.

Das Auswertungsproblem der Prädikatenlogik ist PSpace-vollständig. Wegen $NP \subseteq PSpace$ ist es damit auch NP-schwer.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Gilt $\mathrm{NL} = \textsc{ExpTime}$, dann ist das Halteproblem entscheidbar. ✓

b) Das Herbrand-Universum einer prädikatenlogischen Formel in Skolemform ist stets endlich. ✗

c) Eine prädikatenlogische Formel ist genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell hat. ✗

d) Die QBF $\exists p.\forall q.\exists r.\big((p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)\big)$ ist wahr. ✗

e) Die Beantwortung von Datenbankanfragen in Form prädikatenlogischer Formeln ist – im Bezug auf die Größe der Datenbank *und* der Formel – NP-schwer. ✓

Aufgabe 2 ($2 + 4 + 2 = 8$ Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42?
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich?
3. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome?

Aufgabe 2a (2 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42?

Aufgabe 2a (2 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42?

Dieses Problem ist entscheidbar.

Man kann die TM $\mathcal{M}$ auf Eingabe 42 für n Schritte simulieren. Wenn $\mathcal{M}$ hält, akzeptieren wir, sonst nicht.

Aufgabe 2b (4 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? ✓
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich?

Aufgabe 2b (4 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? ✓
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich?

Dieses Problem ist unentscheidbar.

Es handelt sich um das Wortproblem der Sprache

$$\{enc(\mathcal{M}) \mid L(\mathcal{M}) \text{ist unendlich}\}$$

Da aber Unendlichkeit eine nicht-triviale Eigenschaft formaler Sprachen ist (Σ^* hat die Eigenschaft, $\emptyset$ nicht), ist diese Menge nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

Aufgabe 2 c (2 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? ✓
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich? ✗
3. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome?

Aufgabe 2 c (2 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? ✓
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich? ✗
3. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome?

Dieses Problem ist entscheidbar.

Mit einem einelementigen Alphabet lassen sich nur Palindrome bilden. Es handelt sich also um eine triviale Eigenschaft der Sprache.

Aufgabe 2 $(2 + 4 + 2 = 8$ Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \ldots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42? ✓
2. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich? ✗
3. Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome? ✓

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{v} \rfloor$:

$\mathtt{x}_2 \mathtt{\ :=\ } \mathtt{x}_1 \mathtt{\ +\ } \mathtt{x}_1$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{v} \rfloor$:

$\mathtt{x_2 := x_1 + x_1}$
$\mathtt{x_2 := x_2 + x_1}$;; $\mathtt{x_2}$ ist jetzt $\mathtt{3x_1}$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{y} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{v} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{v} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
 x4 := x3 * x3
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{y} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
 x4 := x3 * x3
 x5 := x2 + 1
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{y} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
  x4 := x3 * x3
  x5 := x2 + 1
  x5 := x5 - x4
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{v} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
 x4 := x3 * x3
 x5 := x2 + 1
 x5 := x5 - x4
 IF x5!=0 THEN  ;; x5!=0 genau dann, wenn x3^2 <= x2
  x0 := x3
 END
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{y} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
 x4 := x3 * x3
 x5 := x2 + 1
 x5 := x5 - x4
 IF x5!=0 THEN  ;; x5!=0 genau dann, wenn x3^2 ≤ x2
  x0 := x3
 END
 x3 := x3 + 1
```

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = \left\lfloor \sqrt{3x} \right\rfloor$. Hierbei bezeichnet die Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion auf natürliche Zahlen, also $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$.

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet.

Das LOOP-Programm berechnet zuerst $x \mapsto 3x$ und danach $y \mapsto \lfloor \sqrt{y} \rfloor$:

```
x2 := x1 + x1
x2 := x2 + x1 ;; x2 ist jetzt 3x1
x3 := 0 ;; Initialisierung (nicht unbedingt erforderlich)
LOOP x2 DO
 x4 := x3 * x3
 x5 := x2 + 1
 x5 := x5 - x4
 IF x5!=0 THEN  ;; x5!=0 genau dann, wenn x3^2 ≤ x2
  x0 := x3
 END
 x3 := x3 + 1
END
```

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \ldots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist.

c) Ist die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

In der Lösung $1, 3, 2$ (mit den Paaren $(ab, a), (cd, bcd), (a, a)$) kommt jedes Paar vor. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \ldots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \ldots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist.

Wenn beide Teile aller Paare gleich lang sind, dann müssen diese Paare in einer Lösung des PCP auch immer übereinstimmen. Es genügt also, für ein gegebenes Problem zu überprüfen, ob es ein Paar mit $x_i = y_i$ gibt.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \dots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \dots, k\}$ für alle $j = 1, \dots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \dots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist.

c) Ist die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Problem: **PCP**
Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in \Sigma^* \times \Sigma^*$.
Gefragt: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \dots, i_\ell$, so dass gilt

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$$

wobei $\ell > 0$ ist und $i_j \in \{1, \dots, k\}$ für alle $j = 1, \dots, \ell$?

---

a) Betrachten Sie die folgende Instanz des PCPs: (ab, a), (a, a), (cd, bcd)
Zeigen Sie, dass jedes Paar in mindestens einer Lösung vorkommt.

b) Zeigen Sie, dass das PCP mit $|x_1| = |y_1|, |x_2| = |y_2|, \dots, |x_k| = |y_k|$ entscheidbar ist.

c) Ist die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche eine Lösung haben, semi-entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, die Menge ist semi-entscheidbar. Um eine Lösung zu finden, lassen sich die möglichen Kombinationen von Wortpaaren systematisch bilden und darauf testen, ob sie eine Lösung bilden. Sobald eine Lösung gefunden ist, endet die Suche. Existiert keine solche Lösung, wird unendlich lange weiter gesucht.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

In der Vorlesung wurden das folgende Problem vorgestellt:

Problem: **SAT**

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F in konjunktiver Normalform (KNF).

Gefragt: Gibt es eine Belegung der Atome in F, die F wahr macht?

Wir verwenden außerdem das folgende Problem:

Problem: **Stabile Menge**

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$.

Gefragt: Gibt es eine Menge $M \subseteq V$, die die folgenden Bedingungen erfüllt?

1. Für alle $m, n \in M$ gilt, dass $(m, n) \notin E$;
2. für alle $n \in V \setminus M$ gilt, dass es ein $m \in M$ gibt mit $(m, n) \in E$.

Aufgabe 5, II

Betrachten Sie nun folgenden Versuch, das Problem **SAT** auf das Problem **Stabile Menge** zu reduzieren.

Wir definieren nachfolgend eine Funktion, die aussagenlogische Formeln in KNF auf gerichtete Graphen abbildet. Sei $F = K_1 \wedge \ldots \wedge K_m$ eine Formel mit m Klauseln und $K_i = L_{i,1} \vee \ldots \vee L_{i,j_i}$ für $1 \leq i \leq m$. Wir konstruieren den Graphen $G_F = (V, E)$ wie folgt: $V = \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{v_{1,1}, \ldots, v_{1,j_i}, v_{2,1}, \ldots, v_{m,j_m}\}$, d.h. für jede Klausel in F und für jedes Literal in jeder Klausel K_i bekommt G_F einen Knoten; $E = \{(u_i, u_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(v_{i,j}, u_i) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq j_i\} \cup \{(v_{i,j}, v_{x,y}), (v_{x,y}, v_{i,j}) \mid L_{i,j} = \neg L_{x,y}\}$, d.h. (1) für jede Klausel hat ihr Knoten eine Kante zu sich selbst; (2) der Knoten eines Literals hat eine Kante zum Knoten einer Klausel, wann immer das Literal in der Klausel vorkommt; und (3) zwei Literal-Knoten werden in beide Richtungen per Kante miteinander verbunden, wenn ihre Literale zueinander widersprüchlich sind.

Aufgabe 5, III

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)

   Hat G_F eine stabile Menge? Markieren Sie sie in der Skizze.

b) Was müsste gezeigt werden, um zu beweisen, dass die angegebene Funktion tatsächlich eine polynomielle Reduktion von **SAT** auf **Stabile Menge** darstellt? Es genügt, wenn Sie die konkret zu zeigenden Aussagen auflisten, den Beweis selbst müssen Sie nicht durchführen.

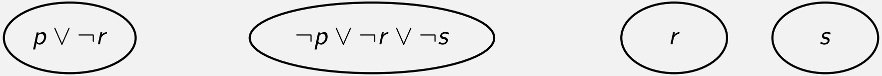
c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt?

   (1) **Stabile Menge** ist in NP.
   (2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

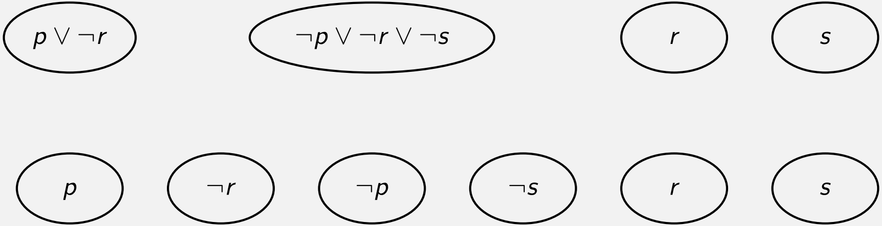
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



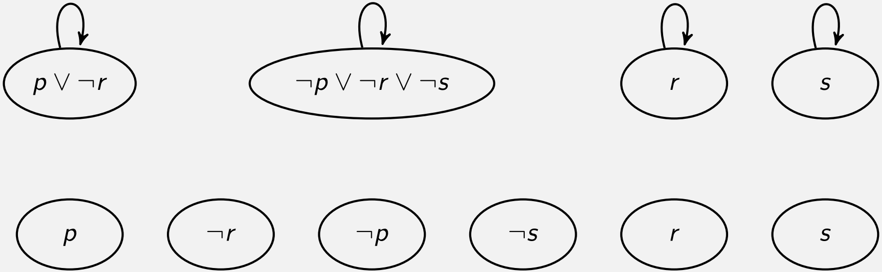
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



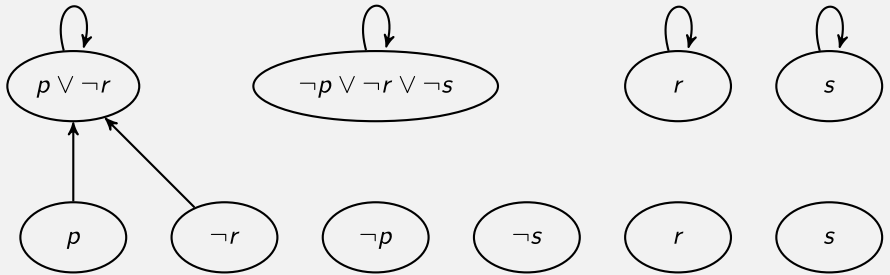
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



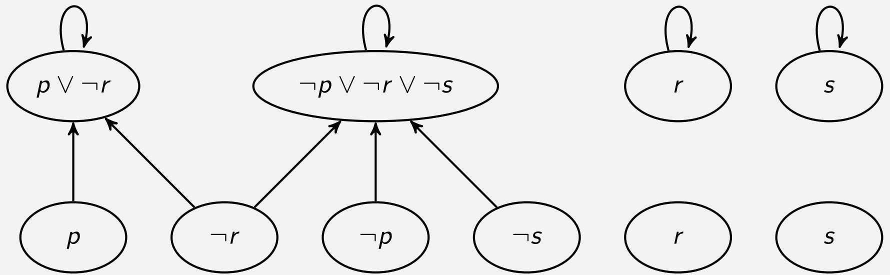
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



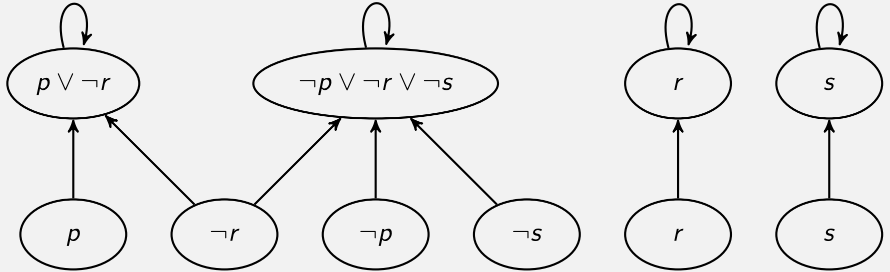
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



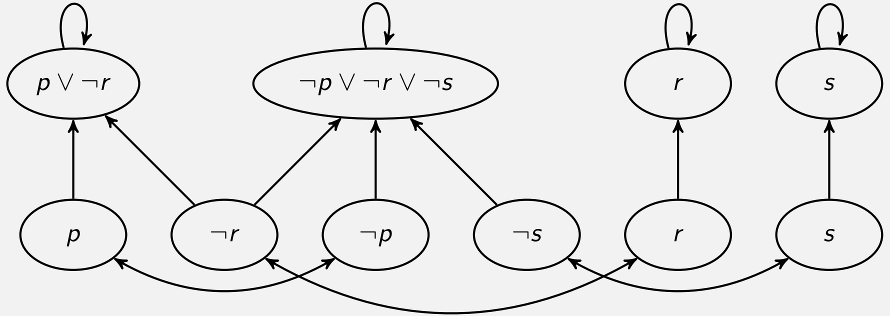
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



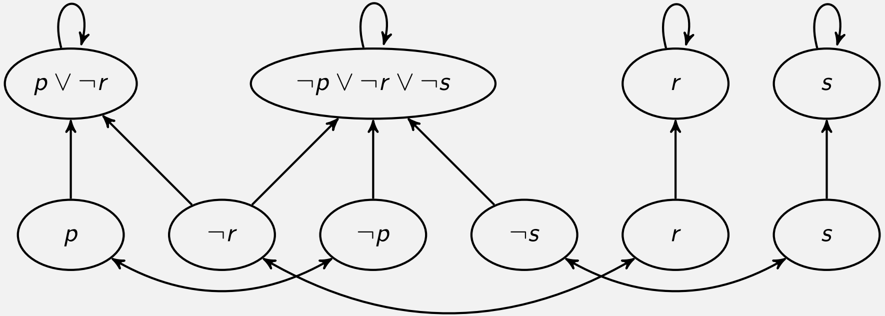
Aufgabe 5a (3 Punkte)

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



Aufgabe 5a (3 Punkte)

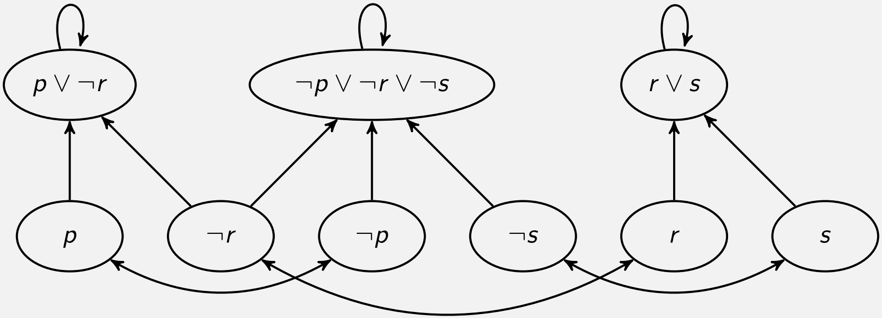
a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $F = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \wedge s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für F den Graphen G_F. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



G_F hat keine stabile Menge: Um die Knoten der Einerklauseln abzudecken, werden die Literalknoten r und s benötigt, das schließt $\neg r$ und $\neg s$ aus jeder stabilen Menge aus. Damit bleibt nur noch $\neg p$, um die zweite Klausel abzudecken, und die erste Klausel kann nicht mehr abgedeckt werden.

Aufgabe 5a – Variante

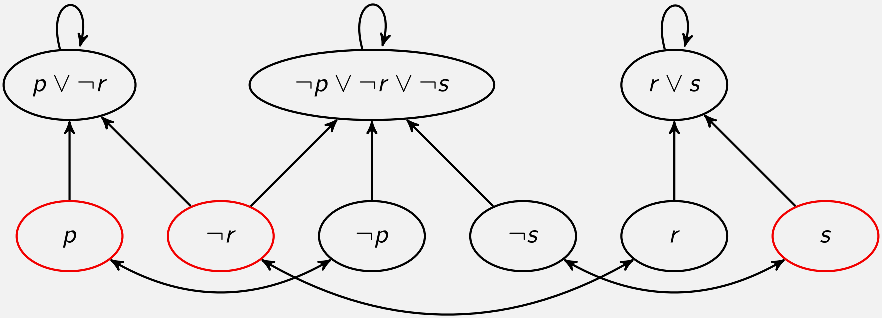
a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $H = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für H den Graphen G_H. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



G_H hat z.B. die stabile Mengen $\{p, \neg r, s\}$, $\{\neg p, \neg r, s\}$, $\{p, \neg s, r\}$.

Aufgabe 5a – Variante

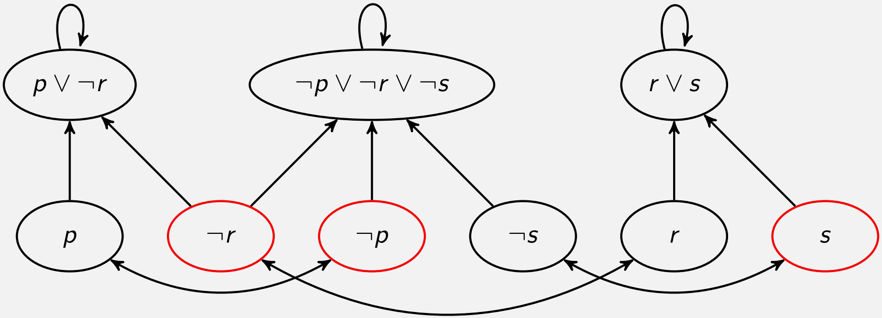
a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $H = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für H den Graphen G_H. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



G_H hat z.B. die stabile Mengen $\{p, \neg r, s\}$, $\{\neg p, \neg r, s\}$, $\{p, \neg s, r\}$.

Aufgabe 5a – Variante

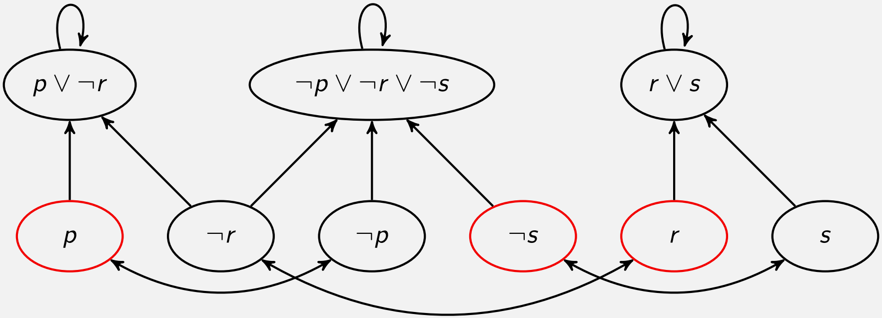
a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $H = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für H den Graphen G_H. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



G_H hat z.B. die stabile Mengen $\{p, \neg r, s\}$, $\{\neg p, \neg r, s\}$, $\{p, \neg s, r\}$.

Aufgabe 5a – Variante

a) Vollziehen Sie die Reduktion an Hand der Formel $H = (p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (r \vee s)$ nach, d.h. konstruieren Sie für H den Graphen G_H. (Eine beschriftete Skizze genügt, Sie müssen die Knoten- und Kantenmengen nicht formal angeben.)



G_H hat z.B. die stabile Mengen $\{p, \neg r, s\}$, $\{\neg p, \neg r, s\}$, $\{p, \neg s, r\}$.

Aufgabe 5b (3 Punkte)

b) Was müsste gezeigt werden, um zu beweisen, dass die angegebene Funktion tatsächlich eine polynomielle Reduktion von **SAT** auf **Stabile Menge** darstellt? Es genügt, wenn Sie die konkret zu zeigenden Aussagen auflisten, den Beweis selbst müssen Sie nicht durchführen.

Es muss gezeigt werden:

1. Die Funktion ist total und in polynomieller Zeit berechenbar.
2. Für jede Eingabeformel F gilt: F ist erfüllbar gdw. G_F eine stabile Menge hat.

Aufgabe 5c und d (1+3 Punkte)

c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt?

(1) **Stabile Menge** ist in NP.
(2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

Aufgabe 5c und d (1+3 Punkte)

c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt?

(1) **Stabile Menge** ist in NP.
(2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

Die Reduktion zeigt **SAT** $\leq_p$ **Stabile Menge**, und damit die NP-Schwere von **Stabile Menge**.

Aufgabe 5c und d (1+3 Punkte)

c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt?

(1) **Stabile Menge** ist in NP.
(2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

Die Reduktion zeigt **SAT** $\leq_p$ **Stabile Menge**, und damit die NP-Schwere von **Stabile Menge**.

d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5c und d (1+3 Punkte)

c) Welche der folgenden beiden Aussagen werden durch diese Reduktion gezeigt?

(1) **Stabile Menge** ist in NP.
(2) **Stabile Menge** ist NP-schwer.

Die Reduktion zeigt **SAT** $\leq_p$ **Stabile Menge**, und damit die NP-Schwere von **Stabile Menge**.

d) Ist **Stabile Menge** NP-vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, **Stabile Menge** ist NP-vollständig, da **Stabile Menge** auch in NP liegt: Für einen gegebenen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ stellt die stabile Menge $M \subseteq V$ ein gültiges Zertifikat dar, da sowohl Abwesenheit von Kanten zwischen Knoten aus M und Abdeckung aller Knoten nicht in M in polynomieller Zeit bezüglich $|V|$ geprüft werden kann (es gilt $|E| \leq |V|^2$).

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\,(m,n) \mid m \leq n\,\}$;

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\,(x,y) \mid |x| = |y|\,\}$;

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\,(m,n) \mid$ es gibt $p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r\}$;

d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\,(x,y) \mid x$ und y enden mit verschiedenen Symbolen$\}$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x. p(x, x) \land \forall x, y. (p(x, y) \to p(y, x)) \land \forall x, y, z. ((p(x, y) \land p(y, z)) \to p(x, z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$;

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\, (m,n) \mid m \leq n \,\}$;

Die Interpretation ist kein Modell.

Die Relation $\leq$ ist nicht symmetrisch, die Teilformel $\forall x,y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x))$ ist nicht erfüllt. Es gilt zum Beispiel $2 \leq 3$ aber nicht $3 \leq 2$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x . p(x, x) \land \forall x, y . (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \land \forall x, y, z . ((p(x, y) \land p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$; ✗

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (x, y) \mid |x| = |y| \}$;

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x . p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \to p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\, (m,n) \mid m \leq n \,\}$; ✗

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\, (x,y) \mid |x| = |y| \,\}$;

Die Interpretation ist ein Modell.

Die Relation „zwei Wörter haben die gleiche Länge“ ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \to p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m,n) \mid m \leq n \}$; ✗

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (x,y) \mid |x| = |y| \}$; ✓

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m,n) \mid \text{es gibt } p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7, \text{ so dass } m = p \cdot 7 + r \text{ und } n = q \cdot 7 + r\}$;

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x. p(x,x) \land \forall x, y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \land \forall x, y, z.((p(x,y) \land p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m,n) \mid m \leq n \}$; ✗

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (x,y) \mid |x| = |y| \}$; ✓

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m,n) \mid$ es gibt $p, q, r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r \}$;

Die Interpretation ist ein Modell.

Die angegebene Relation bezeichnet die Zugehörigkeit zu Restklassen bei Division mit 7 und ist daher eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \wedge \forall x,y.(p(x,y) \rightarrow p(y,x)) \wedge \forall x,y,z.((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\,(m,n) \mid m \leq n\,\}$; ✓
b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\,(x,y) \mid |x| = |y|\,\}$; ✗
c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\,(m,n) \mid$ es gibt $p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r\}$; ✓
d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\,(x,y) \mid x$ und y enden mit verschiedenen Symbolen$\}$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x . p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \to p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\,(m,n) \mid m \leq n\,\}$; ✓

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\,(x,y) \mid |x| = |y|\,\}$; ✗

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\,(m,n) \mid$ es gibt $p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r\}$; ✓

d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\,(x,y) \mid x$ und y enden mit verschiedenen Symbolen$\}$.

Die Interpretation ist kein Modell.

Der erste Teil der Formel, $\forall x . p(x,x)$ (Reflexivität), ist für kein Wort erfüllt. (Jedes Wort endet mit höchstens einem Zeichen, und dieses Zeichen ist nicht verschieden von sich selbst.)

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x. p(x, x) \wedge \forall x, y. (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \wedge \forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m \leq n \}$; ✓

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (x, y) \mid |x| = |y| \}$; ✗

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m, n) \mid$ es gibt $p, q, r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r \}$; ✓

d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{ (x, y) \mid x$ und y enden mit verschiedenen Symbolen$\}$.

Die Interpretation ist kein Modell.

Der letzte Teil der Formel, $\forall x, y, z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$ (Transitivität), ist nicht erfüllt. Wir haben zum Beispiel $\mathcal{I}_4 \models p(012, 011) \wedge p(011, 22)$ aber $\mathcal{I}_4 \not\models p(012, 22)$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Welche der angegebenen Interpretationen sind Modelle der folgenden Formel F?

$$F = \forall x.p(x,x) \land \forall x,y.(p(x,y) \to p(y,x)) \land \forall x,y,z.((p(x,y) \land p(y,z)) \to p(x,z))$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\mathcal{I}_1$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_1} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{\,(m,n) \mid m \leq n\,\}$; ✓

b) $\mathcal{I}_2$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_2} = \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{\,(x,y) \mid |x| = |y|\,\}$; ✗

c) $\mathcal{I}_3$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_3} = \mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{\,(m,n) \mid$ es gibt $p,q,r \in \mathbb{N}, r < 7,$ so dass $m = p \cdot 7 + r$ und $n = q \cdot 7 + r\}$; ✓

d) $\mathcal{I}_4$ mit $\Delta^{\mathcal{I}_4} = \Sigma^*$ für das Alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{\,(x,y) \mid x$ und y enden mit verschiedenen Symbolen$\}$. ✗

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x, y) &\leftarrow n(x, y) \\
O(x, z) &\leftarrow O(x, y) \land n(y, z) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \land O(x, y) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \land R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a, b) & n(b, c) & n(c, d) & n(d, e) \\
s(a, b) & s(c, a) & s(b, d) & s(b, e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x, y) &\leftarrow n(x, y) \\
O(x, z) &\leftarrow O(x, y) \wedge n(y, z) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \wedge O(x, y) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \wedge R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a, b) & n(b, c) & n(c, d) & n(d, e) \\
s(a, b) & s(c, a) & s(b, d) & s(b, e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$T_P^0 = \emptyset$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x, y) &\leftarrow n(x, y) \\
O(x, z) &\leftarrow O(x, y) \wedge n(y, z) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \wedge O(x, y) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \wedge R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a, b) & n(b, c) & n(c, d) & n(d, e) \\
s(a, b) & s(c, a) & s(b, d) & s(b, e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$
\begin{aligned}
T_P^0 &= \emptyset \\
T_P^1 &= \{n(a, b), n(b, c), n(c, d), n(d, e), s(a, b), s(c, a), s(b, d), s(b, e)\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x,y) &\leftarrow n(x,y)\\
O(x,z) &\leftarrow O(x,y) \wedge n(y,z)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge O(x,y)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a,b) & n(b,c) & n(c,d) & n(d,e)\\
s(a,b) & s(c,a) & s(b,d) & s(b,e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$
\begin{aligned}
T_P^0 &= \emptyset\\
T_P^1 &= \{n(a,b), n(b,c), n(c,d), n(d,e), s(a,b), s(c,a), s(b,d), s(b,e)\}\\
T_P^2 &= T_P^1 \cup \{O(a,b), O(b,c), O(c,d), O(d,e)\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x, y) &\leftarrow n(x, y) \\
O(x, z) &\leftarrow O(x, y) \land n(y, z) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \land O(x, y) \\
R(x) &\leftarrow s(y, x) \land R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a, b) & n(b, c) & n(c, d) & n(d, e) \\
s(a, b) & s(c, a) & s(b, d) & s(b, e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$
\begin{aligned}
T_P^0 &= \emptyset \\
T_P^1 &= \{n(a, b), n(b, c), n(c, d), n(d, e), s(a, b), s(c, a), s(b, d), s(b, e)\} \\
T_P^2 &= T_P^1 \cup \{O(a, b), O(b, c), O(c, d), O(d, e)\} \\
T_P^3 &= T_P^2 \cup \{O(a, c), O(b, d), O(c, e)\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x,y) &\leftarrow n(x,y)\\
O(x,z) &\leftarrow O(x,y) \wedge n(y,z)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge O(x,y)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a,b) & n(b,c) & n(c,d) & n(d,e)\\
s(a,b) & s(c,a) & s(b,d) & s(b,e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$
\begin{aligned}
T_P^0 &= \emptyset\\
T_P^1 &= \{n(a,b), n(b,c), n(c,d), n(d,e), s(a,b), s(c,a), s(b,d), s(b,e)\}\\
T_P^2 &= T_P^1 \cup \{O(a,b), O(b,c), O(c,d), O(d,e)\}\\
T_P^3 &= T_P^2 \cup \{O(a,c), O(b,d), O(c,e)\}\\
T_P^4 &= T_P^3 \cup \{O(a,d), O(b,e), R(a)\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$\begin{aligned} O(x,y) &\leftarrow n(x,y) \\ O(x,z) &\leftarrow O(x,y) \wedge n(y,z) \\ R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge O(x,y) \\ R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge R(y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} n(a,b) & n(b,c) & n(c,d) & n(d,e) \\ s(a,b) & s(c,a) & s(b,d) & s(b,e) \end{array}$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$\begin{aligned} T_P^0 &= \emptyset \\ T_P^1 &= \{n(a,b), n(b,c), n(c,d), n(d,e), s(a,b), s(c,a), s(b,d), s(b,e)\} \\ T_P^2 &= T_P^1 \cup \{O(a,b), O(b,c), O(c,d), O(d,e)\} \\ T_P^3 &= T_P^2 \cup \{O(a,c), O(b,d), O(c,e)\} \\ T_P^4 &= T_P^3 \cup \{O(a,d), O(b,e), R(a)\} \\ T_P^5 &= T_P^4 \cup \{O(a,e), R(b)\} \\ T_P^6 &= T_P^5 \cup \{R(d), R(e)\} = T_P^\infty \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende Datalog-Programm P:

$$
\begin{aligned}
O(x,y) &\leftarrow n(x,y)\\
O(x,z) &\leftarrow O(x,y) \wedge n(y,z)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge O(x,y)\\
R(x) &\leftarrow s(y,x) \wedge R(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n(a,b) & n(b,c) & n(c,d) & n(d,e)\\
s(a,b) & s(c,a) & s(b,d) & s(b,e)
\end{array}
$$

Berechnen Sie schrittweise die Mengen $T_P^0, T_P^1, T_P^2, \ldots$. Wann wird der Grenzwert T_P^∞ erreicht?

$$
\begin{aligned}
T_P^0 &= \emptyset\\
T_P^1 &= \{n(a,b), n(b,c), n(c,d), n(d,e), s(a,b), s(c,a), s(b,d), s(b,e)\}\\
T_P^2 &= T_P^1 \cup \{O(a,b), O(b,c), O(c,d), O(d,e)\}\\
T_P^3 &= T_P^2 \cup \{O(a,c), O(b,d), O(c,e)\}\\
T_P^4 &= T_P^3 \cup \{O(a,d), O(b,e), R(a)\}\\
T_P^5 &= T_P^4 \cup \{O(a,e), R(b)\}\\
T_P^6 &= T_P^5 \cup \{R(d), R(e)\} = T_P^\infty
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert wird nach 6 Schritten erreicht.

Aufgabe 8 (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \to \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$\begin{array}{ll} (1) & \{\neg p(x), q(x,y)\} \\ (2) & \{p(x), q(x,f(x))\} \end{array}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c,v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y, z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x, y, z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x, y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y, z.p(x, y, z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x, y, z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x, y))$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned} F =& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y)) \\ \equiv& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall {\color{red}u}.r(x,{\color{red}u})) \qquad \textit{Bereinigte Form} \end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y, z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned} F =& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall y.r(x,y)) \\ \equiv& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall u.r(x,u)) && \textit{Bereinigte Form} \\ \equiv& \forall x.(\neg(\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \lor \forall u.r(x,u)) \end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned}
F =& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y)) & \\
\equiv& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \rightarrow \forall {\color{red}u}.r(x,{\color{red}u})) & \textit{Bereinigte Form} \\
\equiv& \forall x.(\neg(\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \lor \forall u.r(x,u)) & \\
\equiv& \forall x.((\forall y.\exists z.\neg p(x,y,z) \lor \neg q(x)) \lor \forall u.r(x,u)) & \textit{NNF}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned}
F =& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y)) & \\
\equiv& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall {\color{red}u}.r(x,{\color{red}u})) & \textit{Bereinigte Form} \\
\equiv& \forall x.(\neg(\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \vee \forall u.r(x,u)) & \\
\equiv& \forall x.((\forall y.\exists z.\neg p(x,y,z) \vee \neg q(x)) \vee \forall u.r(x,u)) & \textit{NNF} \\
\equiv& \forall x.\forall y.\exists z.\forall u((\neg p(x,y,z) \vee \neg q(x)) \vee r(x,u)) & \textit{PNF}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned}
F =& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y)) && \\
\equiv& \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall u.r(x,u)) && \textit{Bereinigte Form} \\
\equiv& \forall x.(\neg(\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \vee \forall u.r(x,u)) && \\
\equiv& \forall x.((\forall y.\exists z.\neg p(x,y,z) \vee \neg q(x)) \vee \forall u.r(x,u)) && \textit{NNF} \\
\equiv& \forall x.\forall y.\exists z.\forall u((\neg p(x,y,z) \vee \neg q(x)) \vee r(x,u)) && \textit{PNF} \\
\xrightarrow{\textit{Skolem}}& \forall x.\forall y.\forall u(\neg p(x,y,f(x,y)) \vee \neg q(x) \vee r(x,u)) && \textit{SNF}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z)) \qquad \textit{Bereinigte Form}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned} G =& \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \textit{Bereinigte Form} \\ \equiv& \exists x.\neg(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) \end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned} G =& \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \textit{Bereinigte Form} \\ \equiv& \exists x.\neg(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) \\ \equiv& \exists x.(\neg q(x) \wedge \neg(\exists y,z.p(x,y,z))) \end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned} G =& \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \textit{Bereinigte Form} \\ \equiv& \exists x.\neg(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \\ \equiv& \exists x.(\neg q(x) \wedge \neg(\exists y,z.p(x,y,z))) && \\ \equiv& \exists x.(\neg q(x) \wedge (\forall y,z.\neg p(x,y,z))) && \textit{NNF} \end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \land q(x)) \to \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned}
G =& \neg\forall x.(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z)) && \textit{Bereinigte Form} \\
\equiv& \exists x.\neg(q(x) \lor \exists y,z.p(x,y,z)) && \\
\equiv& \exists x.(\neg q(x) \land \neg(\exists y,z.p(x,y,z))) && \\
\equiv& \exists x.(\neg q(x) \land (\forall y,z.\neg p(x,y,z))) && \textit{NNF} \\
\equiv& \exists x.\forall y,z.(\neg q(x) \land (\neg p(x,y,z))) && \textit{PNF}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8a (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

$$F = \forall x.((\exists y.\forall z.p(x,y,z) \wedge q(x)) \rightarrow \forall y.r(x,y))$$
$$G = \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z))$$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

$$\begin{aligned}
G =& \neg\forall x.(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \textit{Bereinigte Form} \\
\equiv& \exists x.\neg(q(x) \vee \exists y,z.p(x,y,z)) && \\
\equiv& \exists x.(\neg q(x) \wedge \neg(\exists y,z.p(x,y,z))) && \\
\equiv& \exists x.(\neg q(x) \wedge (\forall y,z.\neg p(x,y,z))) && \textit{NNF} \\
\equiv& \exists x.\forall y,z.(\neg q(x) \wedge (\neg p(x,y,z))) && \textit{PNF} \\
\xrightarrow{\textit{Skolem}}& \forall y,z.(\neg q(c) \wedge (\neg p(c,y,z))) && \textit{SNF}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}\\
&(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}
\end{aligned}
$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v. q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$\begin{aligned} &(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\} \\ &(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\} \end{aligned}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt:

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c, v) \equiv \forall v.\neg q(c, v)$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c, v) \equiv \forall v.\neg q(c, v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$(3) \quad \{\neg q(c, v)\}$$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c, v) \equiv \forall v.\neg q(c, v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$(3) \quad \{\neg q(c, v)\}$$

Resolution:

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x,y)\}$$
$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c,v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c,v) \equiv \forall v.\neg q(c,v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$(3) \quad \{\neg q(c,v)\}$$

Resolution:

$$(4) \quad \{\neg p(c)\} \quad (3)+(1) \text{ mit } \{x \mapsto c, y \mapsto v\}$$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$(1) \quad \{\neg p(x), q(x, y)\}$$

$$(2) \quad \{p(x), q(x, f(x))\}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c, v) \equiv \forall v.\neg q(c, v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$(3) \quad \{\neg q(c, v)\}$$

Resolution:

$$\begin{array}{lll} (4) & \{\neg p(c)\} & (3)+(1) \text{ mit } \{x \mapsto c, y \mapsto v\} \\ (5) & \{p(c)\} & (3)+(2) \text{ mit } \{x \mapsto c, v \mapsto f(c)\} \end{array}$$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$\begin{array}{ll} (1) & \{\neg p(x), q(x,y)\} \\ (2) & \{p(x), q(x, f(x))\} \end{array}$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c, v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c, v) \equiv \forall v.\neg q(c, v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$(3) \quad \{\neg q(c, v)\}$$

Resolution:

$$\begin{array}{lll} (4) & \{\neg p(c)\} & (3)+(1) \text{ mit } \{x \mapsto c, y \mapsto v\} \\ (5) & \{p(c)\} & (3)+(2) \text{ mit } \{x \mapsto c, v \mapsto f(c)\} \\ (6) & \perp & (4)+(5) \end{array}$$

Aufgabe 8b (6 Punkte)

b) Gegeben ist die Theorie $\mathcal{T}$ durch die Klauseln

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \{\neg p(x), q(x,y)\} \\
(2) & \{p(x), q(x, f(x))\}
\end{array}
$$

wobei x und y Variablen sind.

Prüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, ob $\mathcal{T} \models \exists v.q(c,v)$ gilt, wobei c eine Konstante und v eine Variable ist.

Umformung ergibt: $\neg\exists v.q(c,v) \equiv \forall v.\neg q(c,v)$
Wir erhalten die Klausel:

$$
(3) \quad \{\neg q(c,v)\}
$$

Resolution:

$$
\begin{array}{lll}
(4) & \{\neg p(c)\} & (3)+(1) \text{ mit } \{x \mapsto c, y \mapsto v\} \\
(5) & \{p(c)\} & (3)+(2) \text{ mit } \{x \mapsto c, v \mapsto f(c)\} \\
(6) & \perp & (4)+(5)
\end{array}
$$

Also gilt $\mathcal{T} \models \exists v.q(c,v)$.