TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

19. Vorlesung: Resolution

Sebastian Rudolph

TU Dresden, 26. Juni 2025

— On vient d'être avisé de la Bérarde, qu'un nouvel accident s'est produit dans le massif du Pelvoux : un jeune homme, faisant partie d'une caravane lyonnaise de trois personnes, a fait une chute mortelle.

Wir haben soeben aus La Bérarde erfahren, dass sich ein neuer Unfall auf dem Pelvoux ereignet hat: Ein junger Mann, der Mitglied einer dreiköpfigen Gruppe aus Lyon gewesen ist, stürzte zu Tode.

– Le Temps, Montag, 29. Juli 1931

Resolution für Prädikatenlogik

Ein konkreter Algorithmus zum logischen Schließen:

(1) Logische Konsequenz auf Unerfüllbarkeit reduzieren

(2) Formeln in Klauselform umwandeln
   - Formel bereinigen
   - Negationsnormalform bilden
   - Pränexform bilden
   - Skolemform bilden
   - Konjunktive Normalform bilden

(3) Resolutionsverfahren anwenden
   - Unifikation zum Finden passender Klauseln
   - Bilden von Resolventen bis zur Terminierung

Unifikation

Unifikationsalgorithmus

Eingabe: Ein Unifikationsproblem G.
Ausgabe: Ein allgemeinster Unifikator für G, oder „nicht unifizierbar".

Wende die folgenden Umformungsregeln auf G an, bis keine Regel mehr zu einer Änderung führt:

- Löschen: $\{t \doteq t\} \cup G' \rightsquigarrow G'$
- Zerlegung: $\{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(u_1, \ldots, u_n)\} \cup G' \rightsquigarrow \{s_1 \doteq u_1, \ldots, s_n \doteq u_n\} \cup G'$
- Orientierung: $\{t \doteq x\} \cup G' \rightsquigarrow \{x \doteq t\} \cup G'$ falls $x \in \mathbf{V}$ und $t \notin \mathbf{V}$
- Eliminierung: $\{x \doteq t\} \cup G' \rightsquigarrow \{x \doteq t\} \cup G'\{x \mapsto t\}$ falls $x \in \mathbf{V}$ nicht in t vorkommt

Wenn G dann in gelöster Form ist, dann gib σ_G aus.
Andernfalls gib aus „nicht unifizierbar".

Unifikation von Atomen

Ein Unifikator für eine Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ von prädikatenlogischen Atomen ist eine Substitution θ mit $A_1\theta = A_2\theta = \ldots = A_n\theta$.

Unifikation von Atomen

Ein Unifikator für eine Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ von prädikatenlogischen Atomen ist eine Substitution θ mit $A_1\theta = A_2\theta = \ldots = A_n\theta$.

Beobachtungen:

- Eine Menge von Atomen $\mathcal{A}$ ist nur dann unifizierbar, wenn alle Atome das gleiche Prädikat verwenden, d.h. wenn es ein ℓ-stelliges Prädikatensymbol p gibt, so dass $A_i = p(t_{i,1}, \ldots, t_{i,\ell})$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Dann ist σ genau dann ein Unifikator für $\mathcal{A}$, wenn σ Unifikator für das folgende Unifikationsproblem $G_{\mathcal{A}}$ ist:

$$G_{\mathcal{A}} = \left\{ t_{i,j} \doteq t_{i+1,j} \;\middle|\; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq \ell \right\}$$

- Insbesondere ist der allgemeinste Unifikator für $G_{\mathcal{A}}$ auch der allgemeinste Unifikator für $\mathcal{A}$.

Die Resolutionsregel

Die Resolvente von zwei Klauseln der Form

$$K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\} \text{ und } K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\},$$

für welche σ der allgemeinste Unifikator der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$ ist und L_i, L'_j beliebige Literale sind, ist die Klausel $\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$.

Die Resolutionsregel

Die Resolvente von zwei Klauseln der Form

$$K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\} \text{ und } K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\},$$

für welche σ der allgemeinste Unifikator der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$ ist und L_i, L'_j beliebige Literale sind, ist die Klausel $\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$.

Beobachtung: Wegen $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}\sigma = \{A\}$ für ein Atom A ist $K_1\sigma = \{A, L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma\}$ und $K_2\sigma = \left\{\neg A, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\right\}$.

Beispiel: Die Klausel $K_1 = \{\neg\mathsf{Mensch}(x), \mathsf{hatVater}(x, f(x))\}$ und die Klausel $K_2 = \{\neg\mathsf{hatVater}(z, v), \mathsf{hatKind}(v, z)\}$ können resolviert werden. Ein allgemeinster Unifikator von $\{\mathsf{hatVater}(x, f(x)), \mathsf{hatVater}(z, v)\}$ ist $\sigma = \{z \mapsto x, v \mapsto f(x)\}$. Die entsprechende Resolvente von K_1 und K_2 ist $\{\neg\mathsf{Mensch}(x), \mathsf{hatKind}(f(x), x)\}$.

Resolution: Beispiel (1)

Wir hatten die folgende Beispielformel F betrachtet:

$$\begin{aligned} & \forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x))) \\ \wedge\ & (\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \\ \wedge\ & (\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \end{aligned}$$

(Jeder ist Typ W oder Typ L; ist einer Typ W, dann gibt es hier nur einen Typ; ist einer Typ L, dann gibt es hier nicht nur einen Typ.)

Folgt aus F, dass alle Typ W sind?

Resolution: Beispiel (1)

Wir hatten die folgende Beispielformel F betrachtet:

$$\begin{aligned} &\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x))) \\ \wedge\ &(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \\ \wedge\ &(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \end{aligned}$$

(Jeder ist Typ W oder Typ L; ist einer Typ W, dann gibt es hier nur einen Typ; ist einer Typ L, dann gibt es hier nicht nur einen Typ.)

Folgt aus F, dass alle Typ W sind?

Vorgehen:

- Formalisiere diese Frage: $F \models \forall z.W(z)$?

Resolution: Beispiel (1)

Wir hatten die folgende Beispielformel F betrachtet:

$$\begin{aligned} &\forall x.((W(x) \land \neg L(x)) \lor (L(x) \land \neg W(x))) \\ \land\ &(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \lor \forall x.L(x))) \\ \land\ &(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \lor \forall x.L(x))) \end{aligned}$$

(Jeder ist Typ W oder Typ L; ist einer Typ W, dann gibt es hier nur einen Typ; ist einer Typ L, dann gibt es hier nicht nur einen Typ.)

Folgt aus F, dass alle Typ W sind?

Vorgehen:

- Formalisiere diese Frage: $F \models \forall z.W(z)$?
- Reduktion auf Unerfüllbarkeit: Ist $F \land \neg\forall z.W(z)$ unerfüllbar?

Resolution: Beispiel (1)

Wir hatten die folgende Beispielformel F betrachtet:

$$\begin{aligned} &\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x))) \\ \wedge\ &(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \\ \wedge\ &(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \end{aligned}$$

(Jeder ist Typ W oder Typ L; ist einer Typ W, dann gibt es hier nur einen Typ; ist einer Typ L, dann gibt es hier nicht nur einen Typ.)

Folgt aus F, dass alle Typ W sind?

Vorgehen:

- Formalisiere diese Frage: $F \models \forall z.W(z)$?
- Reduktion auf Unerfüllbarkeit: Ist $F \wedge \neg\forall z.W(z)$ unerfüllbar?
- Klauselform: F haben wir bereits in Klauselform gebracht. Wir können direkt die Klauseln für $\neg\forall z.W(z)$ hinzufügen:
  - Bereinigte NNF (und Pränexform): $\exists z.\neg W(z)$
  - Skolemform (und KNF): $\neg W(a)$ (a ist Skolemkonstante)

Resolution: Beispiel (2)

Zusammen mit der Klauselform für F erhalten wir die Klauseln:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} \\
(8) & \{\neg W(a)\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (2)

Zusammen mit der Klauselform für F erhalten wir die Klauseln:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} \\
(8) & \{\neg W(a)\} \\
(9) & \{L(a)\} \qquad\qquad\qquad\qquad (1) + (8) \quad \{x_1 \mapsto a\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (2)

Zusammen mit der Klauselform für F erhalten wir die Klauseln:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8) \quad \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))\} & (9) + (7) \quad \{x_5 \mapsto a\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (2)

Zusammen mit der Klauselform für F erhalten wir die Klauseln:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8) \quad \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))\} & (9) + (7) \quad \{x_5 \mapsto a\}
\end{array}
$$

Problem:

- Das Literal $\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))$ bedeutet „es gibt Nicht-Lügner“ (bezeichnet mit Termen der Form $f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a)$).
- Dies sollte z.B. mit (1) „Jeder Nicht-Lügner ist Wahrheitssager“ resolvieren.
- Aber $\{L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a)), L(x_1)\}$ hat keinen Unifikator . . .

Varianten von Klauseln

Wir wissen: $\forall x.(F \land G) \equiv (\forall x.F \land \forall x.G)$

In Klauselform kann man sich also die Allquantoren direkt vor jeder einzelnen Klausel denken:

$$
\begin{array}{rl}
(1) & \forall x_1.\{W(x_1), L(x_1)\} \\
(2) & \forall x_1.\{\neg L(x_1), L(x_1)\} \\
 & \ldots \\
(10) & \forall x_1, x_2, x_3, x_4.\{\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))\}
\end{array}
$$

Varianten von Klauseln

Wir wissen: $\forall x.(F \wedge G) \equiv (\forall x.F \wedge \forall x.G)$

In Klauselform kann man sich also die Allquantoren direkt vor jeder einzelnen Klausel denken:

$$\begin{array}{rl} (1) & \forall x_1.\{W(x_1), L(x_1)\} \\ (2) & \forall x_1.\{\neg L(x_1), L(x_1)\} \\ & \ldots \\ (10) & \forall x_1, x_2, x_3, x_4.\{\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))\} \end{array}$$

Daher darf man die Variablen jeder Klausel einheitlich umbenennen, unabhängig von jeder anderen Klausel, z.B.

$$\{\neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, a))\} \quad \rightsquigarrow \quad \{\neg L(f_7(x_1', x_2', x_3', x_4', a))\}$$

Klauseln, die durch eineindeutige Umbenennung von Variablen entstanden sind, nennt man Varianten (einer Klausel).

$\rightsquigarrow$ Wir bilden bei der Resolution Varianten, um Konflikte von Variablen zu vermeiden.

Resolution: Beispiel (3)

Mit einer Variante von Klausel (11) gelingt die Resolution:

$$
\begin{array}{rlll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8) & \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (9) + (7) & \{x_5 \mapsto a\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (3)

Mit einer Variante von Klausel (11) gelingt die Resolution:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8)\ \ \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (9) + (7)\ \ \{x_5 \mapsto a\} \\
(11) & \{W(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (1) + (10)\ \ \{x_1 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (3)

Mit einer Variante von Klausel (11) gelingt die Resolution:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8)\ \ \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x_1', x_2', x_3', x_4', a))\} & (9) + (7)\ \ \{x_5 \mapsto a\} \\
(11) & \{W(f_7(x_1', x_2', x_3', x_4', a))\} & (1) + (10)\ \ \{x_1 \mapsto f_7(x_1', x_2', x_3', x_4', a)\} \\
(12) & \{W(x_3), L(x_4)\} & (11) + (5)\ \ \{x_2 \mapsto f_7(x_1', x_2', x_3', x_4', a)\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (3)

Mit einer Variante von Klausel (11) gelingt die Resolution:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8)\ \ \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (9) + (7)\ \ \{x_5 \mapsto a\} \\
(11) & \{W(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (1) + (10)\ \ \{x_1 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\} \\
(12) & \{W(x_3), L(x_4)\} & (11) + (5)\ \ \{x_2 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\} \\
(13) & \{L(x_4)\} & (12) + (8)\ \ \{x_3 \mapsto a\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (3)

Mit einer Variante von Klausel (11) gelingt die Resolution:

$$
\begin{array}{rll}
(1) & \{W(x_1), L(x_1)\} & \\
(2) & \{\neg L(x_1), L(x_1)\} & \\
(3) & \{W(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(4) & \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\} & \\
(5) & \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\} & \\
(6) & \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(7) & \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} & \\
(8) & \{\neg W(a)\} & \\
(9) & \{L(a)\} & (1) + (8)\ \ \{x_1 \mapsto a\} \\
(10) & \{\neg L(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (9) + (7)\ \ \{x_5 \mapsto a\} \\
(11) & \{W(f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a))\} & (1) + (10)\ \ \{x_1 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\} \\
(12) & \{W(x_3), L(x_4)\} & (11) + (5)\ \ \{x_2 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\} \\
(13) & \{L(x_4)\} & (12) + (8)\ \ \{x_3 \mapsto a\} \\
(14) & \{\} & (13) + (10)\ \ \{x_4 \mapsto f_7(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, a)\}
\end{array}
$$

Resolution: Beispiel (4)

Wir haben durch Resolution die leere Klausel $\{\}$ abgeleitet.

Die leere Klausel bezeichnen wir auch mit $\bot$:

- Sie steht für die leere Disjunktion,
- d.h. für eine unerfüllbare (falsche) Behauptung.

$\leadsto$ Wir haben gezeigt, dass die Klauselmenge unerfüllbar ist.

$\leadsto$ Die geprüfte logische Konsequenz $F \models \forall z.W(z)$ gilt.

Quiz: Resolutionsschritte in der Prädikatenlogik

Die Resolvente von zwei Klauseln der Form

$$K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\} \text{ und } K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\},$$

ist die Klausel

$$\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\},$$

wobei σ der allgemeinste Unifikator von $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$ ist und L_i, L'_j beliebige Literale sind.

Quiz: Welche der folgenden Resolventen sind korrekt berechnet? …

Der Resolutionsalgorithmus

Eingabe: Eine Formel F.

- Wandle F in Klauselform um $\rightsquigarrow$ Klauselmenge $\mathcal{K}_0$
- Für alle $i \geq 0$:
  - $\mathcal{K}_{i+1} := \mathcal{K}_i$
  - Für alle Klauseln $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_i$:
    - Bilde von K_1 und K_2 Varianten K_1' und K_2', welche keine Variablen gemeinsam haben.
    - Bilde alle möglichen Resolventen von K_1' und K_2' und füge diese zu $\mathcal{K}_{i+1}$ hinzu.
  - Falls $\bot \in \mathcal{K}_{i+1}$, dann terminiere und gib „unerfüllbar“ aus.
  - Falls $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i+1}$, dann terminiere und gib „erfüllbar“ aus.

Anmerkung 1: $K_1 = K_2$ ist erlaubt und manchmal notwendig.

Anmerkung 2: $K_1' = K_1$ und/oder $K_2' = K_2$ ist möglich, sofern die Varianten keine gemeinsamen Variablen haben.

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (1)

Wir wollen den folgenden Satz schrittweise beweisen:

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ $(i \geq 0)$ die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar.
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$.

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (1)

Wir wollen den folgenden Satz schrittweise beweisen:

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ ($i \geq 0$) die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar.
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$.

Beweis (Korrektheit): Wir zeigen die Korrektheit eines einzelnen Resolutionsschrittes; die Behauptung folgt per Induktion über die Schrittzahl. Wir unterscheiden Klauseln K vom Satz $\forall K$, für den sie stehen (eine Disjunktion mit allquantifizierten Variablen).

Wir hatten bereits erkannt, dass Varianten von Klauseln deren logische Konsequenzen sind (in der Notation des Algorithmus: $\forall K_1 \models \forall K_1'$ und $\forall K_2 \models \forall K_2'$).

Wir zeigen noch die Korrektheit des reinen Resolutionsschrittes.

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.
- Dann gilt auch $\mathcal{I} \models \forall(K_1\sigma) \wedge \forall(K_2\sigma)$. ($\sigma$ konkretisiert die Allaussagen.)

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.
- Dann gilt auch $\mathcal{I} \models \forall(K_1\sigma) \wedge \forall(K_2\sigma)$. ($\sigma$ konkretisiert die Allaussagen.)
- Also gilt für alle Zuweisungen $\mathcal{Z}$: $\quad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (K_1\sigma) \wedge (K_2\sigma)$

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.
- Dann gilt auch $\mathcal{I} \models \forall(K_1\sigma) \wedge \forall(K_2\sigma)$. ($\sigma$ konkretisiert die Allaussagen.)
- Also gilt für alle Zuweisungen $\mathcal{Z}$: $\quad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (K_1\sigma) \wedge (K_2\sigma)$
- **Fall 1:** $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models A_1\sigma \; (= A_2\sigma = \ldots = A'_m\sigma)$.
  Dann gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models L'_1\sigma \vee \ldots \vee L'_\ell\sigma$, und damit $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models K$

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.
- Dann gilt auch $\mathcal{I} \models \forall(K_1\sigma) \wedge \forall(K_2\sigma)$. ($\sigma$ konkretisiert die Allaussagen.)
- Also gilt für alle Zuweisungen $\mathcal{Z}$: $\quad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (K_1\sigma) \wedge (K_2\sigma)$
- **Fall 1:** $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models A_1\sigma \ (= A_2\sigma = \ldots = A'_m\sigma)$.
  Dann gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models L'_1\sigma \vee \ldots \vee L'_\ell\sigma$, und damit $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models K$
- **Fall 2:** $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models A_1\sigma \ (= A_2\sigma = \ldots = A'_m\sigma)$.
  Dann gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models L_1\sigma \vee \ldots \vee L_k\sigma$, und damit $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models K$

Korrektheit des Resolutionsalgorithmus (2)

Beweis (Korrektheit, Fortsetzung): Gegeben:

- Klauseln $K_1 = \{A_1, \ldots, A_n, L_1, \ldots, L_k\}$ und $K_2 = \{\neg A'_1, \ldots, \neg A'_m, L'_1, \ldots, L'_\ell\}$
- (allgemeinster) Unifikator σ der Menge $\{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m\}$
- zugehörige Resolvente $K = \{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L'_1\sigma, \ldots, L'_\ell\sigma\}$

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretation.

- Angenommen, es gilt $\mathcal{I} \models \forall K_1 \wedge \forall K_2$.
- Dann gilt auch $\mathcal{I} \models \forall(K_1\sigma) \wedge \forall(K_2\sigma)$. ($\sigma$ konkretisiert die Allaussagen.)
- Also gilt für alle Zuweisungen $\mathcal{Z}$: $\quad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models (K_1\sigma) \wedge (K_2\sigma)$
- **Fall 1:** $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models A_1\sigma \ (= A_2\sigma = \ldots = A'_m\sigma)$.
  Dann gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models L'_1\sigma \vee \ldots \vee L'_\ell\sigma$, und damit $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models K$
- **Fall 2:** $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \not\models A_1\sigma \ (= A_2\sigma = \ldots = A'_m\sigma)$.
  Dann gilt $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models L_1\sigma \vee \ldots \vee L_k\sigma$, und damit $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models K$
- Also gilt $\mathcal{I} \models \forall K$.

Da $\mathcal{I}$ beliebig war, gilt also $\forall K_1 \wedge \forall K_2 \models \forall K$.

Das heißt: Jede Resolvente ist logische Konsequenz der resolvierten Klauseln.

Vollständigkeit des Resolutionsalgorithmus

Resolutionssatz: Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\mathcal{K}_i$ $(i \geq 0)$ die vom Resolutionsalgorithmus ermittelten Klauselmengen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- F ist unerfüllbar.
- Es gibt ein $\ell \geq 0$ mit $\bot \in \mathcal{K}_\ell$.

Bisher gezeigt: Die zweite Aussage impliziert die erste (Korrektheit).

Vollständigkeit ist die Umkehrung davon (die erste Aussage impliziert die zweite):

- Jeder Widerspruch wird irgendwann durch Resolution gefunden.
- Das ist nicht so offensichtlich – wir müssen dazu etwas weiter ausholen …

Les accidents de montagne. — Nous avons signalé hier qu'un jeune homme, faisant partie d'une caravane d'alpinistes, excursionnant dans la région de la Bérarde, a fait une chute mortelle. Il s'agit de M. Jacques Herbrand, demeurant à Paris, 10, rue Viollet-le-Duc. M. Herbrand était parti dimanche avec trois camarades, MM. Jean Brille, Pierre Delair et Henri Guigner, pour faire l'ascension des Baus. A la descente, un piton de rocher auquel était attachée la corde céda, entraînant une petite plate-forme sur laquelle se trouvait M. Herbrand, qui fut précipité dans le vide. Une caravane de secours est partie pour rechercher le cadavre, qu'elle espère atteindre aujourd'hui.

Wir hatten gestern erwähnt, dass ein junger Mann, der mit einer Gruppe von Bergsteigern in der Umgebung von La Bérarde unterwegs war, bei einem Sturz ums Leben kam. Es handelte sich um M. Jacques Herbrand, wohnhaft in der Rue Viollet-le-duc 10 in Paris.
M. Herbrand war am Sonntag mit drei Gefährten - den Herren Jean Brille, Pierre Delair und Henri Guigner - aufgebrochen, um Les Bans zu besteigen. Beim Abstieg löste sich ein Kletterhaken, an dem das Seil befestigt war, und nahm eine kleine Plattform mit sich, auf der sich M. Herbrand befand, welcher in den Abgrund stürzte. Ein Bergungstrupp ist aufgebrochen um den Leichnam zu suchen und hofft ihn heute zu erreichen.

- Le Temps, Dienstag, 30. Juli 1931

Jacques Herbrand

12.02.1908 – 27.07.1931

Prädikatenlogische Modelle

Wir wollen zeigen:

> Wenn es kein Modell für eine Formel gibt, dann leitet Resolution $\bot$ ab.

Problem: Interpretationen sind sehr allgemeine Strukturen.

- Eine beliebige Menge kann als Domäne verwendet werden.
- Die systematische Betrachtung von Interpretationen ist daher schwierig.

Prädikatenlogische Modelle

Wir wollen zeigen:

Wenn es kein Modell für eine Formel gibt, dann leitet Resolution $\perp$ ab.

Problem: Interpretationen sind sehr allgemeine Strukturen.

- Eine beliebige Menge kann als Domäne verwendet werden.
- Die systematische Betrachtung von Interpretationen ist daher schwierig.

Idee von Herbrand (und Skolem und Gödel):

„Semantik aus Syntax“

Konstruktion von Modellen direkt aus den Formeln, welche sie erfüllen sollen.

Herbrand-Universum

Der Kern von Herbrands Idee ist eine „syntaktische“ Domäne:

Sei a eine beliebige Konstante. Das Herbrand-Universum Δ_F für eine Formel F ist die Menge aller variablenfreien Terme, die man mit Konstanten und Funktionssymbolen in F und der zusätzlichen Konstante a bilden kann:

- $a \in \Delta_F$,
- $c \in \Delta_F$ für jede Konstante aus F,
- $f(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_F$ für jedes n-stellige Funktionssymbol aus F und alle Terme $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$.

Anmerkung: Das Herbrand-Universum ist immer abzählbar, manchmal endlich und niemals leer.

Herbrand-Universum

Der Kern von Herbrands Idee ist eine „syntaktische“ Domäne:

Sei a eine beliebige Konstante. Das Herbrand-Universum Δ_F für eine Formel F ist die Menge aller variablenfreien Terme, die man mit Konstanten und Funktionssymbolen in F und der zusätzlichen Konstante a bilden kann:

- $a \in \Delta_F$,
- $c \in \Delta_F$ für jede Konstante aus F,
- $f(t_1, \ldots, t_n) \in \Delta_F$ für jedes n-stellige Funktionssymbol aus F und alle Terme $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$.

Anmerkung: Das Herbrand-Universum ist immer abzählbar, manchmal endlich und niemals leer.

Beispiel: Für die Formel $F = p(f(x), y, g(z))$ ergibt sich das Herbrand-Universum $\Delta_F = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), \ldots\}$.

Herbrand-Interpretationen

Mit dem Herbrand-Universum als Domäne kann man Interpretationen definieren, die Terme „durch sich selbst“ interpretieren:

Eine Herbrand-Interpretation für eine Formel F ist eine Interpretation $\mathcal{I}$, für die gilt:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta_F$ ist das Herbrand-Universum von F;
- für jeden Term $t \in \Delta_F$ gilt $t^{\mathcal{I}} = t$.

$\mathcal{I}$ ist genau dann ein Herbrand-Modell für F, wenn zudem gilt $\mathcal{I} \models F$.

Anmerkung: Die Definition stellt Bedingungen an Grundbereich und Terminterpretation, aber sie lässt auch viele Freiheiten (z.B. die Interpretation von Prädikatensymbolen).

Beispiel

Betrachten wir wieder die (skolemisierte) Formel $F = \forall x.\mathsf{hatVater}(x, f(x))$.

Es ergibt sich das Herbrand-Universum $\Delta_F = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.

Alle Herbrand-Interpretationen stimmen auf der Domäne und (dem relevanten Teil) der Terminterpretation überein.

- $\mathcal{I}_1$ mit $\mathsf{hatVater}^{\mathcal{I}_1} = \emptyset$ ist kein Herbrand-Modell.
- $\mathcal{I}_2$ mit $\mathsf{hatVater}^{\mathcal{I}_2} = \{\langle t, f(t)\rangle \mid t \in \Delta_F\}$ ist ein Herbrand-Modell.
- $\mathcal{I}_3$ mit $\mathsf{hatVater}^{\mathcal{I}_3} = \Delta_F \times \Delta_F$ ist ein Herbrand-Modell.

Syntax vs. Semantik

Bei Herbrand-Interpretationen kann man semantische Elemente (wie sie in Zuweisungen vorkommen) durch syntaktische Elemente (wie sie in Substitutionen vorkommen) ausdrücken:

Lemma: Für jede Herbrand-Interpretation $\mathcal{I}$, jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, jeden Term $t \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und jede Formel F gilt:

$$\mathcal{I}, \mathcal{Z}\{x \mapsto t\} \models F \qquad \text{gdw.} \qquad \mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F\{x \mapsto t\} \qquad (\diamond)$$

(Ohne Beweis; einfach.)

Anmerkung: Man kann ein entsprechendes Resultat auch für Nicht-Herbrand-Interpretationen zeigen. Dann muss man lediglich den Term auf der linken Seite durch $t^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}$ ersetzen.

Erfüllbar + Skolem = Erfüllbarkeit bei Herbrand

Satz: Ein Satz F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell hat.

Erfüllbar + Skolem = Erfüllbarkeit bei Herbrand

Satz: Ein Satz F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell hat.

Beweis: $(\Leftarrow)$: Klar, da Herbrand-Modelle auch Modelle sind.

Erfüllbar + Skolem = Erfüllbarkeit bei Herbrand

Satz: Ein Satz F in Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell hat.

Beweis: $(\Leftarrow)$: Klar, da Herbrand-Modelle auch Modelle sind.

$(\Rightarrow)$: Sei $\mathcal{I} \models F$ ein Modell für F. Wir definieren eine Herbrand-Interpretation $\mathcal{J}$ wie folgt:

$$p^{\mathcal{J}} = \left\{ \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in (\Delta_F)^n \;\middle|\; \langle t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I}} \rangle \in p^{\mathcal{I}} \right\}$$

Anmerkung: Die t_i sind variablenfrei, daher ist $t_i^{\mathcal{I}}$ wohldefiniert.

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Wegen $\mathcal{I} \models F$ gilt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$.

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Wegen $\mathcal{I} \models F$ gilt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$.
- Speziell gilt also für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$:
  - $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, x_n \mapsto t_n^{\mathcal{I}}\} \models G$.

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Wegen $\mathcal{I} \models F$ gilt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$.
- Speziell gilt also für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$:
  - $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, x_n \mapsto t_n^{\mathcal{I}}\} \models G$.
  - Daraus folgt $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ (analog zu Lemma $\diamond$).

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Wegen $\mathcal{I} \models F$ gilt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$.
- Speziell gilt also für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$:
  - $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, x_n \mapsto t_n^{\mathcal{I}}\} \models G$.
  - Daraus folgt $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ (analog zu Lemma $\diamond$).
  - Daraus folgt $\mathcal{J} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$.
    (Für Atome G folgt das direkt aus der Definition; die Aussage kann leicht auf größere Boolesche Verknüpfungen von Atomen verallgemeinert werden – formal durch strukturelle Induktion.)

Beweis (Fortsetzung)

Behauptung: $\mathcal{J}$ ist ein Herbrand-Modell von F.

F ist in Skolemform, hat also die Form $\forall x_1, \ldots, x_n.G$, wobei G quantorenfrei ist.

- Wegen $\mathcal{I} \models F$ gilt also $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models G$ für jede Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$.
- Speziell gilt also für alle $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$:
  - $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto t_1^{\mathcal{I}}, \ldots, x_n \mapsto t_n^{\mathcal{I}}\} \models G$.
  - Daraus folgt $\mathcal{I} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ (analog zu Lemma $\diamond$).
  - Daraus folgt $\mathcal{J} \models G\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$.
    (Für Atome G folgt das direkt aus der Definition; die Aussage kann leicht auf größere Boolesche Verknüpfungen von Atomen verallgemeinert werden – formal durch strukturelle Induktion.)
  - Daraus folgt $\mathcal{J}, \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\} \models G$ (Lemma $\diamond$).

Da $t_1, \ldots, t_n \in \Delta_F$ beliebig gewählt waren, folgt also $\mathcal{J} \models F$. $\square$

Gegenbeispiel

Der Satz gilt nicht unbedingt, wenn Formeln nicht in Skolemform sind:

Beispiel: Die folgende Formel ist offensichtlich erfüllbar:

$$\exists x.p(x) \wedge \exists y.\neg p(y)$$

Die Formel verwendet aber keine Funktionen oder Konstanten.
$\rightsquigarrow$ Das Herbrand-Universum ist $\{a\}$.

Aber keine Interpretation $\mathcal{I}$ mit Domäne $\{a\}$ ist Modell der Formel, da in diesem Fall entweder $p^{\mathcal{I}} = \emptyset$ oder $(\neg p)^{\mathcal{I}} = \emptyset$ ist.

Zum Vergleich die Skolemform der Formel dieses Beispiels:

$$p(c) \wedge \neg p(d)$$

Hier gibt es zwei (Skolem-)Konstanten im Herbrand-Universum.
$\rightsquigarrow$ Es gibt ein Herbrand-Modell mit dieser Domäne.

Zusammenfassung und Ausblick

Die prädikatenlogische Resolution ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für die Unerfüllbarkeit logischer Formeln.

Man kann Erfüllbarkeit auf Erfüllbarkeit über „syntaktisch definierten“ Herbrand-Modellen reduzieren. (Fortsetzung folgt . . .)

Was erwartet uns als nächstes?

- Beweis der Vollständigkeit der Resolution
- Logik über endlichen Interpretationen und ihre praktische Anwendung
- Gödel

Bildrechte

Folie 2: Ausschnitt “Le Temps”, 29. Juli 1931, gemeinfrei; Digitalisierung durch gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France; hier veröffentlicht unter CC-By-NC-SA 3.0

Folie 17: Ausschnitt “Le Temps”, 30. Juli 1931, gemeinfrei; Digitalisierung durch gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France; hier veröffentlicht unter CC-By-NC-SA 3.0

Folie 18: Fotografie von Natasha Artin Brunswick, 1931, CC-By 3.0