

SAT Solving oder Lösen von Erfüllbarkeitsproblemen

Steffen Hölldobler

International Center for Computational Logic

Technische Universität Dresden

Germany

- ▶ Aussagenlogik
- ▶ Erfüllbarkeitsprobleme
- ▶ Anwendungen
- ▶ Konjunktive Normalform
- ▶ SAT Solver
- ▶ Hamiltonkreisprobleme
- ▶ Wettbewerb



Aussagen

► Atomare Aussagen (atomare Formeln oder Atome)

Die Sonne scheint

Der Knoten mit der Nummer 1 ist grün

LH1015 fliegt von Dresden nach Frankfurt

An der 4. Stelle des DNA-Strangs steht das Nukleotid C

► Abkürzungen für Atome

p_1 Die Sonne scheint

p_2 ...

► Wahrheitswerte wahr (\top) und falsch (\perp)

► Interpretation Abbildung von der Menge der Aussagen zu $\{\top, \perp\}$

$p_1 \mapsto \top$ Die Aussage "die Sonne scheint" ist wahr

$p_2 \mapsto \perp$ Die Aussage "der Knoten mit der Nummer 1 ist grün" ist falsch



Komplexe Aussagen

► Komplexe Aussagen (Sätze oder Formeln)

Die Sonne scheint	p_1
Die Sonne scheint nicht	$\neg p_1$
Die Sonne scheint oder die Sonne scheint nicht	$(p_1 \vee \neg p_1)$
Die Sonne scheint und der Knoten mit der Nummer 1 ist grün	$(p_1 \wedge p_2)$
Wenn die Sonne scheint, dann ist der Knoten mit der Nummer 1 grün	$(p_1 \rightarrow p_2)$

► **Definition** Die Menge der **(aussagenlogischen) Formeln** ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt

- ▷ Alle Atome sind Formeln
- ▷ Wenn F eine Formel ist, dann ist auch $\neg F$ eine Formel
- ▷ Wenn F und G Formeln sind, dann sind auch $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$ und $(F \rightarrow G)$ Formeln

► **Beispiel** $\neg(\neg(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (p_1 \vee \neg p_1))$

► **Verabredung** Wir lassen “ p ” weg und notieren Atome als natürliche Zahlen



Interpretationen und Modelle

- ▶ **Wir erinnern uns**
Interpretationen sind Abbildungen von der Menge der Aussagen zu $\{\top, \perp\}$
- ▶ **Wie interpretieren wir komplexe Aussagen?**

F	$\neg F$	F	G	$(F \vee G)$	$(F \wedge G)$	$(F \rightarrow G)$
\top	\perp	\top	\top	\top	\top	\top
\perp	\top	\perp	\top	\top	\perp	\top
		\top	\perp	\top	\perp	\perp
		\perp	\perp	\perp	\perp	\top

- ▶ **Gegeben** Interpretation I mit $1 \mapsto \top$ und $2 \mapsto \perp$; dann

$$I(\neg(\neg(1 \wedge 2) \rightarrow (1 \vee \neg 1))) = \perp$$

- ▶ **Definition** Eine Interpretation, die eine gegebene Formel F auf \top abbildet, wird **Modell für F** genannt



Erfüllbarkeitsprobleme

- ▶ **Definition** Eine Formel F ist **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation I gibt, die F auf \top abbildet
- ▶ **Definition** Ein **Erfüllbarkeitsproblem** besteht aus einer Formel F und ist die Frage, ob F erfüllbar ist
- ▶ **Beispiel** Ist $F = \neg(\neg(1 \wedge 2) \rightarrow (1 \vee \neg 1))$ erfüllbar? **Nein**

Interpretation		Formel
1	2	F
\top	\top	\perp
\perp	\top	\perp
\top	\perp	\perp
\perp	\perp	\perp

- ▶ **Beobachtung** Wenn eine Formel n verschiedene Atome enthält, dann gibt es 2^n verschiedene Interpretationen
- ▶ **Bemerkung**
Die Komplexitätstheorie wurde anhand des Erfüllbarkeitsproblems entwickelt!



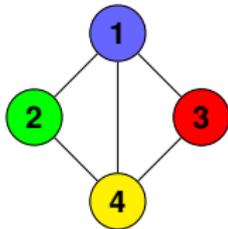
Anwendungen

- ▶ **Terminierung von Programmen**
- ▶ **Planen und Konfigurieren**
- ▶ **Bioinformatik**
- ▶ **Verifikation von Hard- und Software**
- ▶ **Scheduling**
- ▶ **Kryptoanalyse**
- ▶ **Verifikation von Bahnsignalsystemen**
- ▶ **Answer Set Programming**



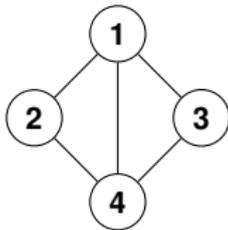
Das Graphfärbungsproblem

- ▶ **Gegeben** ein endlicher Graph und eine Menge von Farben
- ▶ **Gesucht** eine Zuordnung von Farben zu Knoten, so dass alle benachbarte Knoten unterschiedlich Farben haben
- ▶ **Formal**
 - ▷ **Jedem Knoten ist mindestens eine Farbe zugeordnet**
 - ▷ **Jedem Knoten ist höchstens eine Farbe zugeordnet**
 - ▷ **Benachbarte Knoten haben verschiedene Farben**



Naive Kodierung des Graphfärbungsproblems (1)

- ▶ **Aufgabe** Finde für ein gegebenes Graphfärbungsproblem G eine aussagenlogische Formel F , so dass jedes Modell für F eine Lösung für G kodiert
- ▶ **Beispiel** Wir betrachten die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ von Farben und den Graphen



- ▶ **Naive Kodierung der Zuordnung von Farben zu Knoten**

11	Knoten 1 ist Farbe 1 zugeordnet
12	Knoten 1 ist Farbe 2 zugeordnet
⋮	⋮
44	Knoten 4 ist Farbe 4 zugeordnet.



Naive Kodierung des Graphfärbungsproblems (2)

- ▶ **Jedem Knoten ist mindestens eine Farbe zugeordnet**

$$(11 \vee 12 \vee 13 \vee 14) \wedge \dots \wedge (41 \vee 42 \vee 43 \vee 44)$$

- ▶ **Jedem Knoten ist höchstens eine Farbe zugeordnet**

$$\neg(11 \wedge 12) \wedge \neg(11 \wedge 13) \wedge \neg(11 \wedge 14) \dots \wedge \neg(43 \wedge 44)$$

- ▶ **Benachbarte Knoten haben verschiedene Farben**

$$\neg(11 \wedge 21) \wedge \neg(12 \wedge 22) \wedge \neg(13 \wedge 23) \wedge \dots \wedge \neg(34 \wedge 44)$$

- ▶ **Behauptung** Sei F die Konjunktion der so erhaltenen Formeln.
Jedes Modell für F kodiert eine Lösung des Graphfärbungsproblems
- ▶ **Beispiel** Die Interpretation, die **11**, **22**, **33** und **44** auf \top
und alle anderen Atome auf \perp abbildet, ist ein Modell für F



Einige Beobachtungen

- ▶ Die Formeln werden sehr groß
- ▶ 10^7 verschiedene Atome und 10^8 Konjunkte entstehen leicht bei Anwendungen
- ▶ Damit ergibt sich ein Suchraum von 2^{10^7} !
- ▶ Die Formeln sind nicht unmittelbar zu verstehen
- ▶ Wir brauchen maschinelle Unterstützung
- ▶ Dies leisten **SAT Solver**



Eine geschicktere Kodierung des Graphfärbungsproblems (1)

- ▶ **Idee** Wir ordnen die Farben an: $1 < 2 < 3 < 4$
- ▶ **Kodierung der Zuordnung von Farben zu Knoten**

11	Knoten 1 hat Farbe größer gleich 1
12	Knoten 1 hat Farbe größer gleich 2
⋮	⋮
44	Knoten 4 hat Farbe größer gleich 4
$11 \wedge \neg 12$	Knoten 1 hat die Farbe 1
$12 \wedge \neg 13$	Knoten 1 hat die Farbe 2
$13 \wedge \neg 14$	Knoten 1 hat die Farbe 3
14	Knoten 1 hat die Farbe 4
⋮	⋮
44	Knoten 4 hat die Farbe 4



Eine geschicktere Kodierung des Graphfärbungsproblems (1)

- ▶ **Jedem Knoten ist mindestens eine Farbe zugeordnet**

$$11 \wedge 21 \wedge 31 \wedge 41$$

- ▶ **Jedem Knoten ist höchstens eine Farbe zugeordnet**

$$(\neg 11 \rightarrow \neg 12) \wedge (\neg 12 \rightarrow \neg 13) \wedge (\neg 13 \rightarrow \neg 14) \wedge \dots \wedge (\neg 43 \rightarrow \neg 44)$$

- ▶ **Benachbarte Knoten haben verschiedene Farben**

$$\neg(11 \wedge \neg 12 \wedge 21 \wedge \neg 22) \wedge \dots \wedge \neg(34 \wedge 44)$$

- ▶ **Behauptung** Sei F die Konjunktion der so erhaltenen Formeln.
Jedes Modell für F kodiert eine Lösung des Graphfärbungsproblems
- ▶ **Beobachtung** In Experimenten verringerte sich die Laufzeit bei Verwendung der geschickteren Kodierung durchschnittlich um 10%



Konjunktive Normalform (1)

- ▶ SAT-Solver akzeptieren in der Regel Formeln nur in einer bestimmten Form
- ▶ **Definition** Ein **Literal** ist ein Atom oder dessen Negation
- ▶ **Beispiele** 11 , $\neg 12$, $\neg 13$, 14
- ▶ **Definition** Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (CNF)**, wenn sie von der Form

$$(L_{11} \vee \dots \vee L_{1n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m1} \vee \dots \vee L_{mn_m})$$

ist, wobei die L_{ij} Literale sind

- ▶ **Definition** Zwei Formeln F und G sind **äquivalent**, wenn für alle Interpretationen I die Gleichung $I(F) = I(G)$ gilt
- ▶ **Beispiel** $\neg(11 \wedge 12)$ und $(\neg 11 \vee \neg 12)$ sind äquivalent



Konjunktive Normalform (2)

▶ **Theorem** Zu jeder Formel gibt es eine äquivalente Formel in CNF

▶ **Beispiel**

$$(\neg 11 \vee \neg 12) \wedge (\neg 11 \vee \neg 13) \wedge (\neg 11 \vee \neg 14) \dots \wedge (\neg 43 \vee \neg 44)$$

ist eine äquivalente CNF von

$$\neg(11 \wedge 12) \wedge \neg(11 \wedge 13) \wedge \neg(11 \wedge 14) \dots \wedge \neg(43 \wedge 44)$$

▶ **Beobachtung**

Es gibt Algorithmen, die jede gegebene Formel in CNF überführen



SAT-Solver

- ▶ **Es gibt eine ganze Anzahl von frei verfügbaren SAT-Solvern, e.g.**
 - ▷ **MiniSAT**
 - ▷ **RSAT**
 - ▷ **riss**
- ▶ **Sie lösen Probleme in CNF mit bis zu zu 10^7 Atomen und 10^8 Konjunktionen**
- ▶ **Sie werden industriell eingesetzt**
- ▶ **Es gibt jährliche internationale Wettbewerbe für die schnellsten SAT-Solver**
- ▶ **SAT-Solver werden laufend verbessert**
- ▶ **Die Verbesserungen umfassen die gesamte Informatik von der Theorie und den Anwendungen bis zur Hardware**



Lösung des Graphfärbungsproblems mit naiver Kodierung

► **Eingabe an SAT-Solver**

```

p cnf nv nc
11 12 13 14 0
:
41 42 43 44 0
-11 -12 0
:
-43 -44 0
-11 -21 0
:
-34 -44 0
  
```

wobei *nv* und *nc* die Anzahl der Atome (variables) bzw. Konjunkte (clauses) sind

► **Mögliche Ausgabe des SAT-Solvers** 11 22 33 44



Hamiltonkreisprobleme

- ▶ Ein **Hamiltonkreis** ist ein geschlossener Pfad in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält
- ▶ Das **Hamiltonkreisproblem** ist die Frage, ob ein solcher Kreis in einem gegebenen Graphen existiert
 - ▷ Es ist ein fundamentales Problem der Graphentheorie
 - ▷ Es ist NP-vollständig



Übungsaufgabe

- ▶ **Schreiben Sie ein Programm, das nacheinander**
 - ▷ **Hamiltonkreisprobleme von einer Datei einliest**
 - ▷ **die Frage, ob das Problem eine Lösung hat, in ein SAT-Problem transformiert**
 - ▷ **wenn das SAT-Problem lösbar ist, dann den gefundenen Zyklus nach stdout schreibt und mit dem Exitcode 10 terminiert**
 - ▷ **wenn des SAT-Problem unlösbar ist, dann mit dem Exitcode 20 terminiert**
- ▶ **Dabei können Sie existierende Verfahren für die Transformation in CNF sowie existierende SAT-Solver nutzen**
- ▶ **Eingereichte Lösungen werden automatisch auf ihre Korrektheit überprüft**



Wettbewerb

- ▶ Eine Folge von Hamiltonkreisproblemen muss in einer bestimmten Zeit betrachtet werden
- ▶ Die gemessene Zeit ist die Zeit vom Einlesen des Problems bis zum Schreiben der Lösung bzw. von unerfüllbar
- ▶ Für jedes Team t von höchstens 3 Studierenden berechnen wir
 - $C(t)$ die Anzahl der korrekt gelösten Aufgaben,
 - $T(t)$ die Zeit, die zur Lösung dieser Aufgaben verbraucht wurde, und
 - $F(t)$ die Anzahl der eingereichten falschen Lösungen
- ▶ Die Teams werden gemäß der folgenden Relation angeordnet:

$$\begin{aligned}
 s \succ t \quad \text{gdw} \quad & F(s) < F(t) \\
 & \vee (F(s) = F(t) \wedge C(s) > C(t)) \\
 & \vee (F(s) = F(t) \wedge C(s) = C(t) \wedge T(s) < T(t))
 \end{aligned}$$

- ▶ Der Wettbewerb findet am 4. Juli 2016 statt
- ▶ Das beste Team erhält einen Preis



Sonstige Informationen

- ▶ **Die Folien, Infos zum Wettbewerb, etc. finden Sie im Internet unter**
https://ddl1.inf.tu-dresden.de/web/Forschungslinie_%28SS2016%29

