Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (Resolutionsableitungen)

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der folgenden Klauselmengen durch Anwendung des Resolutionsverfahrens. Bilden Sie dazu Resolventen gemäß der im Lehrbuch gegebenen Definition.
Nummerieren Sie die erzeugten Resolventen und geben Sie bei jeder Resolvente an aus welchen Klauseln sie erzeugt wurde.

(a)
1 $[p, \neg q, \neg t]$
2 $[t]$
3 $[q, \neg p, \neg t]$
4 $[t, p, q, r, p, p, t]$
5 $[r, q, t, r]$
6 $[q, \neg t, r, \neg t]$
7 $[\neg r]$
8 $[\neg q, \neg t, \neg q]$

(b)
1 $[s, p, q, r, p, p, s]$
2 $[p, \neg q, \neg s]$
3 $[q, \neg p, \neg s]$
4 $[s]$
5 $[\neg r]$
6 $[r, q, s, r]$
7 $[\neg s, q, r, \neg s]$
8 $[\neg q, \neg s, \neg q]$

Aufgabe 6.2 (Anwendungen des Resolutionsverfahrens)

Seien p, q und r aussagenlogische Variable. Beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens die folgenden Aussagen.

(a) $((((p \land q) \to r) \land \neg r) \to (p \to (q \to r)))$ ist eine Tautologie.

(b) $((\neg r \lor (p \land q)) \land \neg((r \to p) \land (r \to q)))$ ist unerfüllbar.

(c) $(((p \to q) \to p) \to p)$ ist eine Tautologie.

(d) $(((p \to q) \land (q \to r)) \to \neg(\neg r \land p))$ ist eine Tautologie.

Aufgabe 6.3 (Positive/negative Klauseln und Erfüllbarkeit)

Eine Klausel heißt *positiv* gdw. wenn sie nur positive Literale (= aussagenlogische Variable) enthält, und eine Klausel heißt *negativ* gdw. wenn sie nur negative Literale (= negierte aussagenlogische Variable) enthält.

(a) Beweisen Sie, dass eine Klauselmenge erfüllbar ist, wenn sie keine positive Klausel enthält.

(b) Beweisen Sie, dass eine Klauselmenge erfüllbar ist, wenn sie keine negative Klausel enthält.

(c) Beweisen bzw. widerlegen Sie die folgende Aussage:
Eine positive Klausel ist niemals negativ.

Aufgabe 6.4 (Tautologieelimination)

Sei $\langle D_1, \ldots, D_n \rangle$ eine verallgemeinerte Konjunktion mit verallgemeinerten Disjunktionen $D_1, \ldots, D_n$. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wenn in einer verallgemeinerten Disjunktion D_j ($j \in \{1, \ldots, n\}$) sowohl F als auch $\neg F$ vorkommt (wobei F eine beliebige aussagenlogische Formel ist), dann gilt

$$\langle D_1, \ldots D_{j-1}, D_j, D_{j+1} \ldots, D_n \rangle \equiv \langle D_1, \ldots D_{j-1}, D_{j+1} \ldots, D_n \rangle.$$

Aufgabe 6.5 (Subsumtion)

Wir definieren: Eine Klausel C *subsumiert* eine Klausel C' gdw.
jedes Literal aus C auch in C' vorkommt.

Sei $F = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ eine Formel in Klauselform und seien C_i und C_j Klauseln aus F mit $(i \neq j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweisen Sie: Wenn die Klausel C_i die Klausel C_j subsumiert, dann gilt:

$$\langle C_1, \ldots, C_n \rangle \text{ ist erfüllbar gdw. } \langle C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1} \ldots, C_n \rangle \text{ ist erfüllbar.}$$

Aufgabe 6.6 (Folgerungen und endlich vielen Prämisse)

Beweisen Sie die folgende Behauptung:
$\mathcal{F} \models G$ gilt gdw. es eine endliche Teilmenge $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{F}$ gibt mit $\mathcal{F}' \models G$.

Aufgabe 6.7 (Korrektheit und Vollständigkeit)

(a) Geben Sie ein Verfahren zur Ermittlung der aussagenlogischen Allgemeingültigkeit an, das korrekt aber nicht vollständig ist.

(b) Geben Sie ein Verfahren zur Ermittlung der aussagenlogischen Allgemeingültigkeit an, das vollständig aber nicht korrekt ist.