Technische Universität Dresden
Institut für Künstliche Intelligenz
Arbeitsgruppe Wissensverarbeitung

Wintersemester 2018/19

Formale Systeme

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 (Länge und Tiefe von Formeln?)

In dieser Aufgabe definieren wir Länge und Tiefe aussagenlogischer Formeln und beweisen eine Beziehung zwischen diesen beiden Funktionen.

(a) Die Tiefe einer aussagenlogischen Formel F ist die maximale Länge eines Asts in der Baumdarstellung der Formel F, oder etwas formaler ausgedrückt, die maximale Länge der Positionen in F. Diese Funktion depth lässt sich wie folgt definieren:

$$\mathsf{depth}(F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } F \text{ atomar} \\ \mathsf{depth}(G) + 1 & \text{falls } F \text{ von der Form } \neg G \\ \max(\mathsf{depth}(G_1), \mathsf{depth}(G_2)) + 1 & \text{falls } F \text{ v. d. F. } (G_1 \circ G_2) \end{cases}$$

Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{depth}((\neg p \to (\neg p \land q)))$ gemäß der obigen Definition, wobei p und q aussagenlogische Variablen sind.

(b) Definieren Sie mit struktureller Rekursion die Funktion $\mathsf{length}(F)$, welche die Anzahl der Vorkommen von Zeichen des aussagenlogischen Alphabets in einer Formel F angibt ($\mathcal{R} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$). Zum Beispiel soll die Funktion length die folgenden Werte liefern:

$$\begin{aligned} \mathsf{length}(p_3) &= 1 \\ \mathsf{length}(\neg p_3) &= 2 \\ \mathsf{length}((\neg p_3 \land p_4)) &= 6 \end{aligned}$$

Atome (wie z.B. p_3 und p_4) sollen dabei als jeweils ein Symbol gelten, d.h. ihre Indizes zählen nicht als Symbole.

(c) Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle aussagenlogischen Formeln F gilt: $\mathsf{length}(F) > \mathsf{depth}(F)$

Aufgabe 2.2 (Elementares zu Teilformelmengen)

(a) Geben Sie für die folgenden Formeln die Menge aller Teilformeln an.

(1) $(\neg p \land (q \to r))$

(2) p

(b) Geben Sie für die Formel $F = (p \wedge q)$ mit aussagenlogischen Variablen p und q

(1) eine Formelmenge an, welche die Bedingungen (1) und (2) der Definition von $\mathcal{S}_F$ (auf den Folien zur Vorlesung, S. 17) erfüllt, aber nicht Bedingung (3).

(2) eine Formelmenge an, welche die Bedingungen (1) und (3) erfüllt, aber nicht Bedingung (2).

(3) eine Formelmenge an, welche die Bedingungen (2) und (3) erfüllt, aber nicht Bedingung (1).

Aufgabe 2.3 (Proposition 3.11: F^I ist durch I auf $\mathcal{R}_F$ bestimmt)

Beweisen Sie mittels struktureller Induktion über den Aufbau von aussagenlogischen Formeln, dass für jede Interpretation I gilt: der Wahrheitswert F^I einer Formel F unter der Interpretation I ist allein durch die Wahrheitswerte von I auf der Menge $\mathcal{R}_F$ (Definition 3.8) bestimmt.

Aufgabe 2.4 (Beispiele für Wahrheitswertetabellen)

Sei $F \in \mathcal{L}(\mathcal{R})$ die Formel $(((p \vee q) \longrightarrow q) \longrightarrow q)$.

(a) Erstellen Sie eine vollständige Wahrheitswertetabelle (gemäß Vorlesung) für F.

(b) Ist die obige Formel F allgemeingültig, erfüllbar, widerlegbar oder unerfüllbar?

(c) Erstellen Sie eine vollständige Wahrheitswertetabelle (gemäß Vorlesung) für die Formel $p \in \mathcal{R}$.

Aufgabe 2.5 (Tautologie, erfüllbar, widerlegbar?)

Seien p, q und r aussagenlogische Variablen. Welche der folgenden Formeln bzw. Formelmengen sind allgemeingültig, welche sind erfüllbar, welche unerfüllbar und welche sind widerlegbar?

(a) $(((p \to q) \to p) \to p)$

(b) $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \vee ((r \to q) \wedge (q \to p)))$

(c) $\neg(((p \to q) \to p) \to p)$

(d) $\{F_1, F_2\}$, wobei F_1 die in Teilaufgabe (a) angegebene Formel und F_2 die in Teilaufgabe (b) angegebene Formel ist.