

Theoretische Informatik und Logik

24. Vorlesung: Gödel, Turing und der ganze Rest

Markus Krötzsch

Professur Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 19. Juli 2026



Kurt Gödel

Der 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Satz (Gödel, 1931): Jedes konsistente formale System, in dem eine gewisse Menge elementarer Arithmetik korrekt dargestellt werden kann, ist unvollständig in Bezug auf die Beweisbarkeit von Sätzen der elementaren Arithmetik.

Relevante Begriffe:

- **Formales System:** Ein implementierbares Verfahren, mit dem man Theoreme endlich beweisen kann
- **Konsistent:** Man kann niemals eine Aussage und ihr Gegenteil beweisen.
- **Gewisse Menge Arithmetik:** Kodierung konkreter natürlicher Zahlen und deren korrekte Addition, Subtraktion, Multiplikation und Vergleich
- **Unvollständig:** Es gibt Sätze, die weder bewiesen noch widerlegt werden können

Beispiele

Beispiel: Natürliche Zahlen und einfache Rechenregeln können mit einer prädikatenlogischen Theorie definiert werden. Mit Resolution kann man daraus korrekte neue Schlüsse ziehen. Laut Gödels erstem Satz kann man auf diese Art aber niemals alle wahren Aussagen der Arithmetik beweisen, außer wenn die Theorie widersprüchlich ist.

Keine prädikatenlogische Theorie kann die elementare Arithmetik vollständig beschreiben.

Beispiele

Beispiel: Natürliche Zahlen und einfache Rechenregeln können mit einer prädikatenlogischen Theorie definiert werden. Mit Resolution kann man daraus korrekte neue Schlüsse ziehen. Laut Gödels erstem Satz kann man auf diese Art aber niemals alle wahren Aussagen der Arithmetik beweisen, außer wenn die Theorie widersprüchlich ist.

Keine prädikatenlogische Theorie kann die elementare Arithmetik vollständig beschreiben.

Beispiel: Die moderne Mathematik basiert auf der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel unter Hinzunahme des Auswahlaxioms. Dieses formale System heißt ZFC. Es ist klar definiert, was ein korrekter mathematischer Beweis in ZFC ist. Laut Gödels erstem Satz gibt es also wahre Aussagen über elementare Arithmetik, die nicht in ZFC bewiesen werden können.

Gödel's 2. Unvollständigkeitssatz

Gödel kam direkt zu einer weiteren Schlussfolgerung:

Satz: Jedes konsistente formale System, in dem eine gewisse Menge elementarer Arithmetik korrekt dargestellt werden kann, kann nicht seine eigene Konsistenz beweisen.

Auch hier gibt es einige vage Punkte:

- Was ist „eine gewisse Menge elementarer Arithmetik“?
- Was genau bedeutet „seine eigene Konsistenz beweisen“?

Konsistenz beweisen

Konsistenz bedeutet formal:

„Für alle Sätze F gilt: es gibt keinen Beweis für F oder es gibt keinen Beweis für $\neg F$.“

- Um das ausdrücken zu können, muss das System über die im eigenen System möglichen Beweise reflektieren können
- Diese Idee ist verwandt mit der Intuition, dass man in Arithmetik universelle Turingmaschinen kodieren kann: die Beweise eines Systems sind letztlich die akzeptierenden Läufe einer TM
- Man benötigt dazu etwas mehr Arithmetik als für den Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes (Details sparen wir uns)

Beweis des 2. Unvollständigkeitssatzes

Gödels Argument für seinen 1. Unvollständigkeitssatz (vereinfacht):

Gödel definiert eine mathematische Formel F , welche ausdrückt:

„ F ist wahr genau dann wenn F nicht beweisbar ist.“

- Wenn F beweisbar wäre, dann ist sie wahr und also nicht beweisbar – Widerspruch
- Also ist F nicht beweisbar, und damit wahr

□

Es stellt sich heraus: mit einer „gewissen Menge Arithmetik“ kann man diese Argumentation komplett im System darstellen!

Beweis des 2. Unvollständigkeitssatzes

Gödels Argument für seinen 1. Unvollständigkeitssatz (vereinfacht):

Gödel definiert eine mathematische Formel F , welche ausdrückt:

„ F ist wahr genau dann wenn F nicht beweisbar ist.“

- Wenn F beweisbar wäre, dann ist sie wahr und also nicht beweisbar – Widerspruch
- Also ist F nicht beweisbar, und damit wahr

□

Es stellt sich heraus: mit einer „gewissen Menge Arithmetik“ kann man diese Argumentation komplett im System darstellen!

Warum ist diese Argumentation dann nicht schon ein Beweis für F ?

Beweis des 2. Unvollständigkeitssatzes

Gödels Argument für seinen 1. Unvollständigkeitssatz (vereinfacht):

Gödel definiert eine mathematische Formel F , welche ausdrückt:

„ F ist wahr genau dann wenn F nicht beweisbar ist.“

- Wenn F beweisbar wäre, dann ist sie wahr und also nicht beweisbar – Widerspruch
- Also ist F nicht beweisbar, und damit wahr

□

Es stellt sich heraus: mit einer „gewissen Menge Arithmetik“ kann man diese Argumentation komplett im System darstellen!

Warum ist diese Argumentation dann nicht schon ein Beweis für F ?

Weil wir die Annahme verwenden, dass das System konsistent ist.

- Wenn wir dies beweisen könnten, so wäre auch F beweisbar.
- Aber laut 1. Unvollständigkeitssatz ist F nicht beweisbar.

Also kann die Konsistenz des Systems nicht beweisbar sein.

□

Beispiele

Beispiel: Es gibt keinen elementaren arithmetischen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik. Man kann deren Konsistenz aber leicht im stärkeren System ZFC beweisen.

Beispiele

Beispiel: Es gibt keinen elementaren arithmetischen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik. Man kann deren Konsistenz aber leicht im stärkeren System ZFC beweisen.

Beispiel: Es ist nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit der modernen Mathematik (ZFC) aus sich selbst heraus zu beweisen. Auch das kann man allerdings in mächtigeren Systemen erreichen.

Beispiele

Beispiel: Es gibt keinen elementaren arithmetischen Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Peano-Arithmetik. Man kann deren Konsistenz aber leicht im stärkeren System ZFC beweisen.

Beispiel: Es ist nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit der modernen Mathematik (ZFC) aus sich selbst heraus zu beweisen. Auch das kann man allerdings in mächtigeren Systemen erreichen.

Anmerkung: Dadurch wird die Mathematik nicht in eine Sinnkrise gestürzt. Selbst wenn man die Konsistenz von ZFC in ZFC beweisen könnte wäre dies sicherlich kein starkes Argument für ZFC. Mathematische Systeme erhalten ihre Bedeutung niemals aus sich selbst heraus.

Der universelle elektronische Mathematiker

Oder: „Hilberts Programm als Turingmaschine“

Skizze einer Turingmaschine:

- Bilde systematisch der Reihe nach alle möglichen Beweise der modernen Mathematik (System ZFC)
- Halte sobald ein Beweis für die Aussage „ $0=1$ “ auftaucht

Hält diese Turingmaschine?

Der universelle elektronische Mathematiker

Oder: „Hilberts Programm als Turingmaschine“

Skizze einer Turingmaschine:

- Bilde systematisch der Reihe nach alle möglichen Beweise der modernen Mathematik (System ZFC)
- Halte sobald ein Beweis für die Aussage „ $0=1$ “ auftaucht

Hält diese Turingmaschine?

- Ja, wenn ZFC inkonsistent ist
- Nein, wenn ZFC konsistent ist

Der universelle elektronische Mathematiker

Oder: „Hilberts Programm als Turingmaschine“

Skizze einer Turingmaschine:

- Bilde systematisch der Reihe nach alle möglichen Beweise der modernen Mathematik (System ZFC)
- Halte sobald ein Beweis für die Aussage „ $0=1$ “ auftaucht

Hält diese Turingmaschine?

- Ja, wenn ZFC inkonsistent ist
- Nein, wenn ZFC konsistent ist

↪ Vermutlich hält die TM nicht, aber die moderne Mathematik kann das nicht beweisen.

Der universelle elektronische Mathematiker

Oder: „Hilberts Programm als Turingmaschine“

Skizze einer Turingmaschine:

- Bilde systematisch der Reihe nach alle möglichen Beweise der modernen Mathematik (System ZFC)
- Halte sobald ein Beweis für die Aussage „ $0=1$ “ auftaucht

Hält diese Turingmaschine?

- Ja, wenn ZFC inkonsistent ist
- Nein, wenn ZFC konsistent ist

↪ Vermutlich hält die TM nicht, aber die moderne Mathematik kann das nicht beweisen.

Anmerkung: Es gibt eine bekannte TM mit 7910 Zuständen, die sich so verhält [Yedidia & Aaronson 2016] und sogar eine mit nur 1919 Zuständen [O'Rear, 2016].

Konsequenzen

Wir haben Turing-Mächtigkeit und Unentscheidbarkeit in vielen Formalismen gezeigt – jedes davon erlaubt die Konstruktion universeller Mathematiker!

Es gibt konkrete Beispiele für

- WHILE-Programme,
- Python-Programme,
- Typ-0-Grammatiken,
- PCP-Instanzen,
- diophantische Gleichungen,
- prädikatenlogische Theorien,
- ...

deren Halten/Leerheit/Lösbarkeit/Erfüllbarkeit nicht durch die übliche Mathematik (=ZFC) bewiesen oder widerlegt werden kann

zumindest falls die übliche Mathematik konsistent ist

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Turing: Es gibt Probleme, die durch kein automatisches Verfahren lösbar sind.

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Turing: Es gibt Probleme, die durch kein automatisches Verfahren lösbar sind.

Gödel: Es gibt konstruierbare Beispiele konkreter arithmetischer Sätze, deren Gültigkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Turing: Es gibt Probleme, die durch kein automatisches Verfahren lösbar sind.

Gödel: Es gibt konstruierbare Beispiele konkreter arithmetischer Sätze, deren Gültigkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Matiyasevich/Robinson/Davis/Putnam: Die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen ist unentscheidbar.

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Turing: Es gibt Probleme, die durch kein automatisches Verfahren lösbar sind.

Gödel: Es gibt konstruierbare Beispiele konkreter arithmetischer Sätze, deren Gültigkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Matiyasevich/Robinson/Davis/Putnam: Die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen ist unentscheidbar.

Alle zusammen: Es gibt also sogar konkrete diophantische Gleichungen, deren Lösbarkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Hilberts 10. Problem, revisited

Hilbert: „... man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.“

Turing: Es gibt Probleme, die durch kein automatisches Verfahren lösbar sind.

Gödel: Es gibt konstruierbare Beispiele konkreter arithmetischer Sätze, deren Gültigkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Matiyasevich/Robinson/Davis/Putnam: Die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen ist unentscheidbar.

Alle zusammen: Es gibt also sogar konkrete diophantische Gleichungen, deren Lösbarkeit nicht in der modernen Mathematik bewiesen oder widerlegt werden kann.

Aber: Die Lösbarkeit jeder konkreten diophantischen Gleichung wird durch irgendein Programm entschieden (wir wissen nur oft nicht, welches, bzw. können seine Korrektheit nicht in ZFC mathematisch beweisen).

Zusammenfassung und Ausblick

Konsistente formale Systeme, die genügend ausdrucksstark sind, können ihre eigene Konsistenz nicht beweisen.

In jedem turing-vollständigen Formalismus gibt es semi-entscheidbare Probleme, die dem Halteproblem entsprechen. Dann gibt es immer auch einzelne Instanzen, für welche die Antwort auf dieses Problem „nein“ ist, aber für die man das nicht mathematisch beweisen kann.

Was erwartet uns als nächstes?

- Zusammenfassung
- Ausblick
- Prüfungsvorbereitung

Literatur und Bildrechte

Literatur

- A. Yedidia, S. Aaronson: **A Relatively Small Turing Machine Whose Behavior Is Independent of Set Theory.** Complex Systems 25(4), 2016.
- S. O'Rear: **Metamath Turing Machines.**
<https://github.com/sorear/metamath-turing-machines>

Bildrechte

Folie 2: Fotografie um 1926, gemeinfrei