

FORMALE SYSTEME

18. Vorlesung: Turingmaschinen

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 15. Dezember 2016

Turingmaschinen

Zusammenfassung Typ 2

Kontextfreie Sprachen

- Beschrieben durch **kontextfreie Grammatiken** und **Kellerautomaten**
- Können **mehrdeutig** sein
- Können **deterministisch** sein (beschrieben durch deterministische Kellerautomaten und **LR(k)**-Grammatiken)
- Wortproblem **polynomiell**, im deterministischen Fall sogar **linear**
- Sonstige Entscheidungsprobleme meist viel schwerer als bei regulären Sprachen
- Nicht unter allen Operationen abgeschlossen

Kellerautomaten erweitern

Unmittelbar denkbare Erweiterungen von Kellerautomaten:

- Verwendung von zwei oder mehr Kellern
- Verwendung von FIFO-Speichern (Warteschlange)
- Verwendung einer endlichen Menge von Zählern
- ...

All diese Modelle erkennen genau die **Typ-0-Sprachen!**

Das klassische Automatenmodell für diese Sprachklasse ist die **Turingmaschine**.

Was kann diese Art von Automaten?
Alles, was überhaupt auf Computern machbar ist!



Alan Turing (publ. dom.)

Church-Turing-These: Die Turingmaschine kann alle Funktionen berechnen, die intuitiv berechenbar sind.

Turingmaschinen – Grundideen

Wesentliche Designentscheidungen

bei der Gestaltung von Turingmaschinen (TMs):

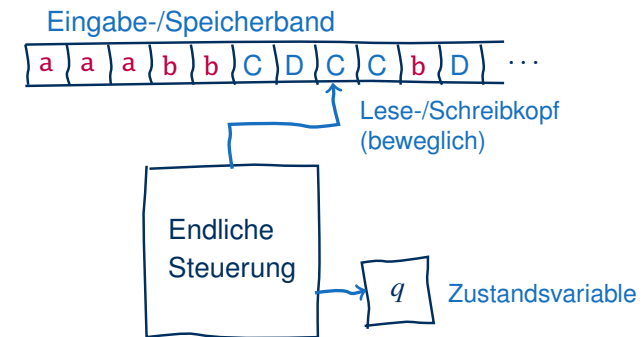
- TMs haben eine **endliche Steuerung** (wie bei NFA und PDA)
- Es gibt eine **unbeschränkte Menge an Speicher** (wie bei PDA)
- Die TM kann in jedem Schritt **ein Zeichen** aus dem Speicher **lesen** und eines **schreiben** (wie bei PDA)
- Der Lese-/Schreibzugriff ist **an jeder beliebigen Speicheradresse** möglich (im Gegensatz zu PDA)

Zur praktischen Implementierung speichert die TM die aktuelle Adresse und kann diese in jedem Schritt um eins erhöhen oder verringern

- Zur Vereinfachung wird die Eingabe einfach beim Start in den Speicher übergeben, so dass „Lesen der Eingabe“ und „Lesen aus Speicher“ die selbe Operation sind

Turingmaschinen – Grundideen (2)

Schematische Darstellung:



Übergangsfunktion:

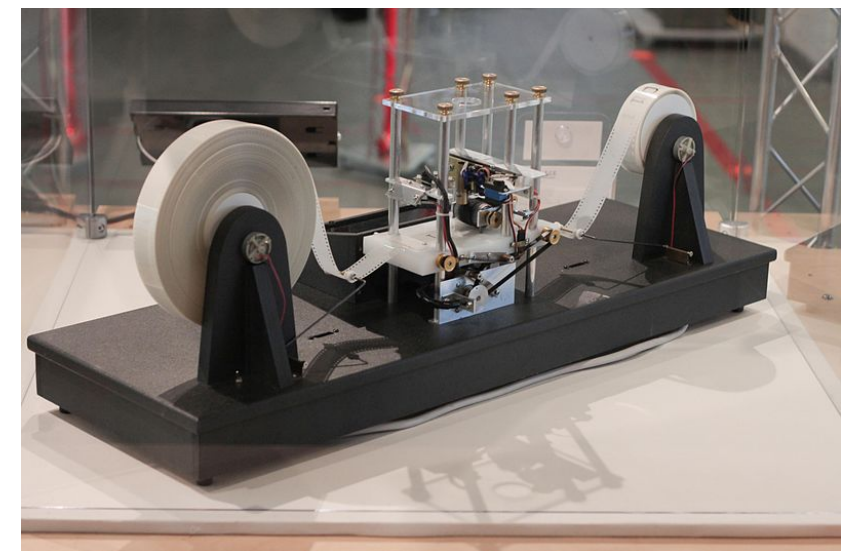
- **Eingabe:** aktueller Zustand, gelesenes Zeichen
- **Ausgabe:** neuer Zustand, geschriebenes Zeichen, Änderung Lese-/Schreibadresse ($\hat{=}$ Bewegung Lese-/Schreibkopf)

Speicherzugriff in TMs

Speicherverwaltung:

- Zu jedem Zeitpunkt verwendet die TM endlich viele Speicherzellen
- Speicherzellen als „Band“ von links nach rechts
- Lese-/Schreibkopf kann frei auf Band bewegt werden (pro Schritt um eine Zelle nach links oder rechts)
- Am linken Rand kann der Kopf nicht weiter nach links bewegt werden
- Am rechten Rand des Speichers kann der Kopf nach rechts bewegt werden: dann wird dort eine neue Speicherzelle mit dem Inhalt \sqcup (Leerzeichen, Blank) angefügt

Alternative Vorstellung: Der Speicher ist ein einseitig unendlich langes Band, auf dem am Anfang nur eine (endliche) Eingabe steht, gefolgt von unendlich vielen leeren Zellen (\sqcup).



Modell einer Turingmaschine, (c) Foto: Rocky Acosta, 2012, CC-BY 3.0

Definition TM

Eine (deterministische) Turingmaschine (DTM) ist ein Tupel $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen:

- Q : endliche Menge von Zuständen
- Σ : Eingabealphabet
- Γ : Arbeitsalphabet mit $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{\sqcup\}$
- δ : Übergangsfunktion, eine partielle Funktion

$$Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$$

- q_0 : Startzustand $q_0 \in Q$
- F : Menge von akzeptierenden Endzuständen $F \subseteq Q$

Dabei bedeutet $\delta(q, a) = \langle p, b, D \rangle$:

„Liest die TM in Zustand q unter dem Lese-/Schreibkopf ein a , dann wechselt sie zu Zustand p , überschreibt das a mit b und verschiebt den Lese-/Schreibkopf gemäß $D \in \{L, R, N\}$ (nach links, nach rechts, gar nicht).“

Beispiel (1)

Wir konstruieren eine TM mit dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0\}$, welche Wörter der Sprache $\{0^{2^i} \mid i \geq 0\}$ akzeptiert (Ketten von 0, deren Länge eine Zweierpotenz ist)

Arbeitsweise:

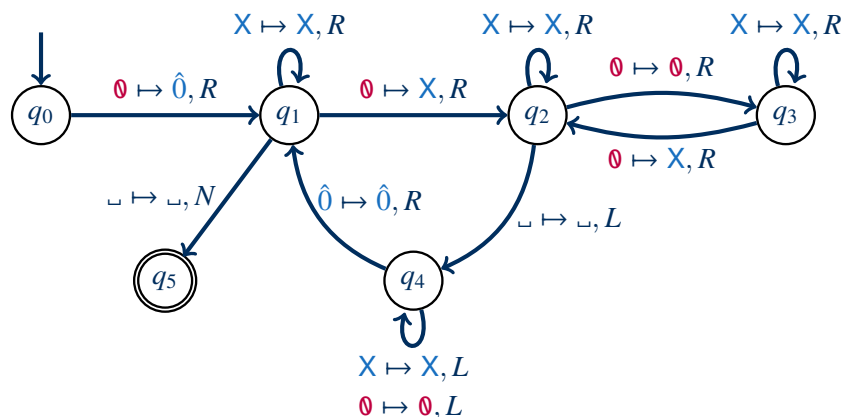
- (1) Laufe von links nach rechts über die Eingabe und ersetze dabei jede zweite 0 durch X
- (2) Falls insgesamt nur eine 0 gefunden wird, akzeptiere
- (3) Falls eine andere ungerade Zahl an 0 gefunden wird, verwerfe
- (4) Laufe zurück zum Anfang des Bandes
- (5) Wiederhole die Schritte ausgehend von (1)

Beispiel (2)

Wir können TMs in Diagrammen darstellen:

Ein Pfeil $s_1 \mapsto s_2, D$ von q_1 nach q_2 bedeutet $\delta(q_1, s_1) = \langle q_2, s_2, D \rangle$

Übergangsrelation zum Beispiel:



Arbeitsweise einer TM: Übergänge

Sei $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F \rangle$ eine DTM.

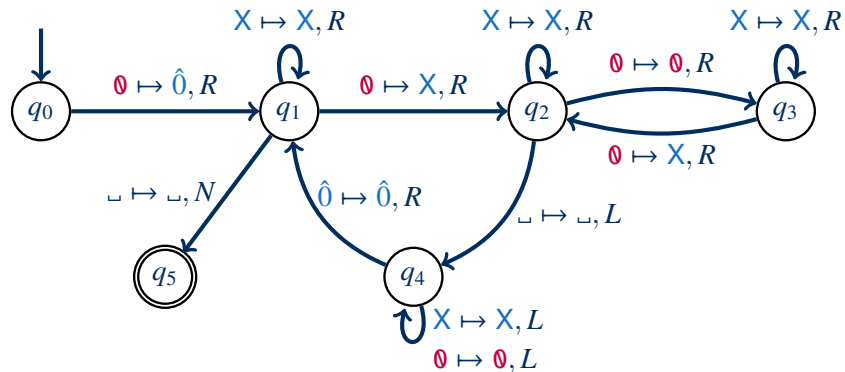
Eine Konfiguration von \mathcal{M} ist ein Wort $wqav \in \Gamma^* \circ Q \circ \Gamma^*$, wobei w den Bandinhalt vor dem Lese-/Schreibkopf, q den aktuellen Zustand und v den Bandinhalt ab dem Lese-/Schreibkopf darstellt.

Sei $wqav$ eine Konfiguration, mit $w, v \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$. Die Übergangsrelation \vdash ist wie folgt definiert:

- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, N \rangle$, dann $wqav \vdash wrbv$.
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, R \rangle$
 - falls $v \neq \epsilon$, dann $wqav \vdash wbrv$;
 - falls $v = \epsilon$, dann $wqav \vdash wbr\sqcup$.
- Falls $\delta(q, a) = \langle r, b, L \rangle$
 - falls $w = w'c$ mit $c \in \Gamma$, dann $wqav \vdash w'rcbv$;
 - falls $w = \epsilon$, dann $wqav \vdash rbv$.

Mit \vdash^* bezeichnen wir den reflexiven, transitiven Abschluss von \vdash .

Beispiel (3)



Übergänge bei Eingabe von 0000:

$q_0 \ 0000 \vdash \hat{0} \ q_1 \ 000 \vdash \hat{0}X \ q_2 \ 00 \vdash \hat{0}X0 \ q_3 \ 0 \vdash \hat{0}X0X \ q_2 \ \sqcup \vdash \hat{0}X0 \ q_4 \ X \ \sqcup \vdash$
 $\hat{0}X \ q_4 \ 0X \ \sqcup \vdash \hat{0} \ q_4 \ X0X \ \sqcup \vdash \ q_4 \ \hat{0}X0X \ \sqcup \vdash \hat{0} \ q_1 \ X0X \ \sqcup \vdash \hat{0}X \ q_1 \ 0X \ \sqcup \vdash \hat{0}XX \ q_2 \ X \ \sqcup \vdash$
 $\hat{0}XXX \ q_2 \ \sqcup \vdash \hat{0}XX \ q_4 \ X \ \sqcup \vdash \hat{0}X \ q_4 \ XX \ \sqcup \vdash \hat{0} \ q_4 \ XXX \ \sqcup \vdash \ q_4 \ \hat{0}XXX \ \sqcup \vdash$
 $\hat{0} \ q_1 \ XXX \ \sqcup \vdash \hat{0}X \ q_1 \ XX \ \sqcup \vdash \hat{0}XX \ q_1 \ X \ \sqcup \vdash \hat{0}XXX \ q_1 \ \sqcup \vdash \hat{0}XXX \ q_5 \ \sqcup$

Arbeitsweise einer TM: Läufe

Für Eingabewort w beginnt die TM mit der **Startkonfiguration** $q_0 w$.

Ein **Lauf** ist eine maximale Folge von Konfigurationen, die durch die Übergangsrelation in Beziehung stehen

- Ein Lauf kann endlich sein, wenn es für die Schlusskonfiguration keinen Nachfolger gibt
- Ein Lauf kann unendlich sein, wenn immer neue Konfigurationen erreichbar sind

Die TM **akzeptiert** die Eingabe, wenn der (eindeutig bestimmte) Lauf, der mit $q_0 w$ beginnt, endlich ist und seine letzte Konfiguration einen Endzustand beinhaltet.

Andernfalls **verwirft** die TM die Eingabe.

Sprache einer TM

Die Sprache einer TM wird wie erwartet definiert:

Die von einer TM M **erkannte Sprache** $L(M)$ ist die Menge aller Wörter, die von einer TM akzeptiert werden.

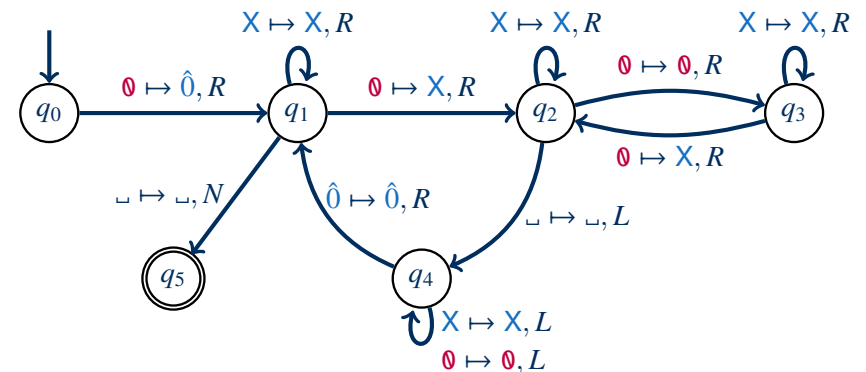
Zwei Gründe für Nichtakzeptanz von Wörtern:

- (1) TM hält in einem Zustand, der kein Endzustand ist
- (2) TM hält nicht (Endlosschleife)

Es ist praktisch, wenn eine TM garantiert hält, da man Fall (2) meist nicht sicher erkennen kann (man weiß nicht, ob die TM irgendwann doch noch anhält)

Eine TM ist ein **Entscheider**, wenn sie bei jeder Eingabe hält. Wir sagen in diesem Fall, dass die TM die von ihr erkannte Sprache **entscheidet**.

Beispiel (4)



Diese TM entscheidet die Sprache $\{0^{2^i} \mid i \geq 0\}$.

Turingmaschinen programmieren

Beobachtung: Die detaillierte Beschreibung von TMs ist in der Regel sehr aufwändig

Abhilfe: Oft reicht die skizzenhafte Beschreibung der Arbeitsweise

Beispiel: Eine TM zur Erkennung von $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ arbeitet wie folgt:

- (1) Ersetze, angefangen von links, Vorkommen von **a** durch \hat{a}
- (2) Immer wenn ein **a** ersetzt wurde, suche ein **b** und ersetze es durch \hat{b} , suche anschließend rechts davon ein **c** und ersetze es durch \hat{c}
- (3) Gehe danach zurück zum ersten noch nicht ersetzten **a** und führe die Ersetzung (1) fort, bis alle **a** ersetzt worden sind
- (4) Akzeptiere, falls der Inhalt des Bandes die Form $\hat{a}^* \hat{b}^* \hat{c}^*$ hat
- (5) Andernfalls oder falls eine der Ersetzungen in Schritt (2) fehlschlägt, weil es zu wenige **b** oder **c** gibt, lehne die Eingabe ab

Die Church-Turing-These

Was ist mit dem intuitiven Begriff der „mechanisch berechenbaren“ Funktion gemeint?

- Gödel/Herbrand (1934): allgemeine rekursive Funktionen
- Church (1936): λ -Kalkül
- Turing (1936): Turingmaschine (ursprünglich „a-machine“)
- Kleene/Rosser/Church/Turing: Die drei Ansätze beschreiben die gleiche Klasse von Funktionen!

Church-Turing-These: Eine Funktion ist genau dann im intuitiven Sinne berechenbar, wenn es eine Turingmaschine gibt, die für jede mögliche Eingabe den Wert der Funktion auf das Band schreibt und anschließend hält.

- **Lesart 1:** Vorschlag einer mathematischen Definition der intuitiven Idee von Berechenbarkeit
- **Lesart 2:** „Naturgesetz“ über die Möglichkeiten und Grenzen des Rechnens an sich

Berechnung vs. Worterkennung

Wir haben TMs als Automaten zur Worterkennung definiert:

- Eingabe wird am Anfang auf Band gegeben
- TM kann (a) anhalten und die Eingabe akzeptieren, (b) anhalten und die Eingabe ablehnen oder (c) nicht anhalten

Wie kann man TMs als allgemeines Rechenmodell verstehen?

- (1) Berechnungsfragen können als Wortproblem kodiert werden.
 - Eingabewörter als Kodierung der beliebiger Eingaben (z.B. als Binärdatei)
 - Berechnung einer Booleschen Funktion
 \leadsto Entscheidungsproblem
- (2) Alternative Definition: Der Inhalt des Bandes beim Halten der TM wird als Ausgabe interpretiert (keine Endzustände nötig). Dann kodieren TMs partielle Funktionen $\Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ (partiell, da die TM nicht immer anhalten muss)

Varianten von Turingmaschinen

Es gibt sehr viele alternative Definitionen von Turingmaschinen

- Alternative Akzeptanzbedingungen (Ausgabe der Antwort auf Band, totale Übergangsfunktion + explizite Stoppzustände für Akzeptanz & Ablehnung, ...)
- Alternative Bewegungsregeln (keine N -Übergänge, anderes Verhalten am Rand des Bandes, ...)
- TMs mit beidseitig unendlichem Band
- TMs mit mehreren Bändern
- nichtdeterministische Turingmaschinen
- TMs mit wahlfreiem Speicherzugriff (RAM)
- ...

All diese Varianten können die selben Funktionen berechnen – wenn auch zum Teil mit unterschiedlichem Aufwand

\leadsto Untermauerung der Church-Turing-These

TMs mit mehreren Bändern

Die Mehrband-Turingmaschine

... verwendet eine vorher festgelegte Zahl $k \geq 2$ von (einseitig unendlichen) Speicherbändern

... erweitert die Übergangsfunktion entsprechend:

$$Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times (\Gamma \times \{L, R, N\})^k$$

... erhält die Eingabe auf dem ersten Band, während die anderen anfänglich leer sind

Wichtig: Die TM hat einen unabhängigen Lese-/Schreibkopf für jedes Band (unterschiedliche Bewegungen/Positionen möglich)

Beispiel: Ein deterministischer PDA kann leicht durch eine 2-Band-TM simuliert werden. Dabei wird vom ersten Band nur gelesen, während auf dem zweiten Band der aktuelle Kellerinhalt gespeichert wird.

Mehr Bänder \neq mehr Ausdrucksstärke

Jede Mehrband-TM ist äquivalent zu einer TM (mit einem Band).

Beweis: Es ist klar, dass eine TM durch eine Mehrband-TM simuliert werden kann, indem einfach nur ein Band genutzt wird.

Umgekehrt können mehrere Bänder auf einem simuliert werden:

- Für jedes der k Bänder gibt es je ein endliches Wort (Bandinhalt) und eine Position (Lese-/Schreibkopf)
- Speicherung auf einem Band:
 - Bandinhalte werden hintereinander gespeichert, getrennt durch ein Sonderzeichen #
 - Steht der Kopf über einer Zelle mit Symbol s , dann wird dort stattdessen ein markiertes Symbol \hat{s} gespeichert
- Die kodierte Startkonfiguration der k -Band-TM bei Eingabe $a_1 \cdots a_n$ ist also: $\# \hat{a}_1 a_2 \cdots a_n \# \hat{\ } \# \cdots \# \hat{\ } \#$

Mehr Bänder \neq mehr Ausdrucksstärke (2)

Jede Mehrband-TM ist äquivalent zu einer TM (mit einem Band).

Beweis (Fortsetzung): Mit dieser Kodierung kann die TM einzelne Schritte der Mehrband-TM simulieren:

- Initialisierung: Die Eingabe wird in die Kodierung der k -Band-Konfiguration umgeschrieben
- Berechnungsschritt: Die TM läuft über das gesamte Band und liest die Symbole an den Kopf-Positionen; die k gelesenen Symbole werden in der Zustandsinformation kodiert; dann läuft die TM nochmals über das Band und aktualisiert alle k Kodierungen entsprechend der Übergangsfunktion
- Falls der Speicher für ein Band erweitert werden muss (Verlassen des bisher verwendeten Speichers nach rechts), verschiebt die TM alle darauf folgenden Zellen entsprechend, kehrt zurück und setzt die Simulation fort

Mehr Bänder \neq mehr Ausdrucksstärke (3)

Jede Mehrband-TM ist äquivalent zu einer TM (mit einem Band).

Beweis (Fortsetzung): Die skizzierte Simulation benötigt viele Zustände, um alle relevanten Informationen zwischenspeichern zu können (Zustand der simulierten Maschine, gelesene Symbole unter den k Köpfen, Arbeitszustand bei Hilfsoperationen wie Speicherverschiebung, ...).

\leadsto Details umständlich, aber im Prinzip machbar. \square

Komplexität?

- Die Zahl der Schritte zur Simulation eines Schrittes ist proportional zur Gesamtlänge des beschriebenen Speichers
- Der maximal beschriebene Speicher pro Band ist proportional zur Zahl der bereits berechneten Schritte
- Die Simulation von n Schritten benötigt also $O(kn^2)$ Schritte (Sofern n nicht kürzer ist als die Eingabe w ; allgemeiner: $O(kn \max(n, |w|))$)

Nichtdeterministische TMs

Die nichtdeterministische Turingmaschine (NTM)

... modelliert die Übergangsfunktion als totale Funktion:

$$Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}}$$

wobei $2^{Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}}$ die Potenzmenge von $Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ ist

... kann weiterhin mit einem einzigen Anfangszustand arbeiten

Läufe werden wie bei DTMs definiert, aber jetzt kann es pro Eingabe viele Läufe geben

Die Eingabe wird akzeptiert, wenn mindestens ein Lauf endlich ist und in einer akzeptierenden Konfiguration endet

Nichtdeterminismus \neq mehr Ausdrucksstärke

Jede NTM ist äquivalent zu einer DTM.

Beweis: Die Simulation verwendet eine 3-Band-TM (äquivalent zu einer normalen DTM wie bereits gezeigt):

Band 1: Eingabewort (wird nie verändert)

Band 2: Arbeitsband der simulierten NTM für aktuellen Lauf

Band 3: Beschreibung der Übergangsentscheidungen des aktuell simulierten Laufs

Für jeden Übergang gibt es nur endlich viele Optionen, sagen wir ℓ .

Dann kann eine Folge von Entscheidungen als Sequenz von Zahlen in $\{0, \dots, \ell - 1\}$ beschrieben werden

\leadsto Band 3 enthält solch ein Wort über $\{0, \dots, \ell - 1\}$

Der Inhalt von Band 3 kann als Zahl zur Basis ℓ gelesen werden: Um systematisch alle Optionen zu durchsuchen, kann diese Zahl in Schritten von 1 erhöht werden

Nichtdeterminismus \neq mehr Ausdrucksstärke

Jede NTM ist äquivalent zu einer DTM.

Beweis: Allgemeine Idee:

- Wir simulieren systematisch einen Lauf nach dem anderen
- Die simulierende TM akzeptiert die Eingabe, wenn ein akzeptierender Lauf gefunden wird
- Andernfalls hält sie nicht an

Wie kann man systematisch alle möglichen Läufe testen?

- Tiefensuche: berechne zunächst einen Lauf; falls dieser fehlschlägt, dann gehe zum letzten Entscheidungspunkt zurück und teste eine andere Möglichkeit
 \leadsto Problem: nicht akzeptierende Läufe können unendlich sein
- Breitensuche: berechne alle Läufe bis zu einer gewissen Tiefe, für immer größere Tiefen
 \leadsto Simulation eines Laufs wird bei Maximaltiefe abgebrochen

Nichtdeterminismus \neq mehr Ausdrucksstärke

Jede NTM ist äquivalent zu einer DTM.

Beweis: Arbeitsweise der Simulation:

- (1) Initialisiere Band 3 mit dem Inhalt 0
- (2) Kopiere die Eingabe von Band 1 nach Band 2
- (3) Simuliere einen Lauf der NTM auf Band 2. In jedem Schritt wird von Band 3 eine Zahl gelesen und der Übergang ausgeführt, der dieser Zahl entspricht.
 - Falls ein Übergang mit der gelesenen Zahl nicht möglich ist, gehe zu (4)
 - Falls alle Zahlen auf Band 3 gelesen sind, gehe zu (4)
- (4) Prüfe ob die simulierte NTM in einem Endzustand angehalten hat und akzeptiere in diesem Fall, andernfalls:
- (5) Inkrementiere die Zahl auf Band 3 um 1, lösche Band 2 und gehe zu Schritt (2)

□

Zusammenfassung und Ausblick

Turingmaschinen (TMs) liefern ein allgemeines Modell der Berechnung

Die **Church-Turing-These** besagt, dass jeder Algorithmus in diesem Modell beschrieben werden kann

Zahlreiche Varianten von TMs führen zur gleichen Ausdrucksstärke, speziell **Mehrband-TMs** und **nichtdeterministische TMs**.

Offene Fragen:

- Wie ergibt sich die Korrespondenz von TMs und Typ-0-Sprachen?
- Wenn alle Modelle Typ 0 liefern, was ist dann mit Typ 1?
- Unterscheiden sich Typ 0 und Typ 1 überhaupt?