Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Wissensbasierte Systeme

Theoretische Informatik und Logik
6. Übungsblatt

Prof. Markus Krötzsch — Dr. Stephan Mennicke
Woche vom 29. Mai–5. Juni 2026 — Sommersemester 2026

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Es gibt Probleme, die NP-schwer, aber nicht NP-vollständig sind.

b) Ist $\mathbf{L}_1$ eine NP-vollständige Sprache und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ eine NP-vollständige Sprache.

c) Ist $\mathbf{L}_2$ eine NP-vollständige Sprache und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_1$ eine NP-vollständige Sprache.

Aufgabe 2

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ gibt, so dass $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und es eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

a) Zeigen Sie $K \in \mathrm{NP}$.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-schweres Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf K in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben eine aussagenlogische Formel φ mit n Variablen, gibt es eine erfüllende Belegung von φ, bei der mindestens die Hälfte aller in φ vorkommenden Variablen mit "true"belegt sind?

a) Formalisieren Sie dieses Problem als Sprache und zeigen Sie, dass $K \in \mathrm{NP}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-schweres Problem ist.

Aufgabe 4

Das Problem **3SAT** ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe: Eine Menge F von Klauseln C mit $|C| \leq 3$;

Frage: Ist die F erfüllbar?

Zeigen Sie, dass **3SAT** NP-vollständig durch polynomielle many-one Reduktion von **SAT**.

Aufgabe 5

Im folgenden *Solitaire*-Spiel haben wir ein Spielbrett der Größe $m \times m$ gegeben. Als Ausgangsposition liegt auf jeder der m^2 Positionen entweder ein blauer Stein, ein roter Stein, oder gar nichts. Das Spiel wird nun so gespielt, dass Steine vom Brett genommen werden bis in jeder Spalte nur noch Steine einer Farbe liegen, und in jeder Zeile mindestens ein Stein liegen bleibt. In diesem Fall ist das Spiel gewonnen. Es ist möglich, dass man ausgehend von einer Ausgangsposition das Spiel nicht gewinnen kann.

a) Formalisieren Sie das Problem, für eine gegebene Ausgangsposition im Solitaire-Spiel zu entscheiden, ob es möglich ist, das Spiel zu gewinnen, als ein Entscheidungsproblem SOLITAIRE.

b) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE $\in$ NP gilt.

c) Zeigen Sie, dass SOLITAIRE ein NP-schweres Problem ist, indem Sie zeigen, dass **3SAT** in polynomieller Zeit auf SOLITAIRE reduzierbar ist.

Aufgabe 6

PCP-k ist das folgende Entscheidungsproblem:

Gegeben: eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ in unärer Kodierung und eine Instanz P des Postschen Korrespondenzproblems, d.h. eine endliche Folge von Wortpaaren

$$P = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

über einem Alphabet Σ, also $x_i, y_i \in \Sigma^+$ für $1 \leq i \leq n$.

Gefragt: Gibt es eine Lösung für P mit maximaler Länge k? Oder genauer: Gibt es eine Folge von Zahlen $i_1, \ldots, i_\ell$, so dass gilt:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell},$$

wobei $0 < \ell \leq k$ ist und $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$?

a) Zeigen Sie, dass **PCP**-k entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass **PCP**-k in NP liegt.